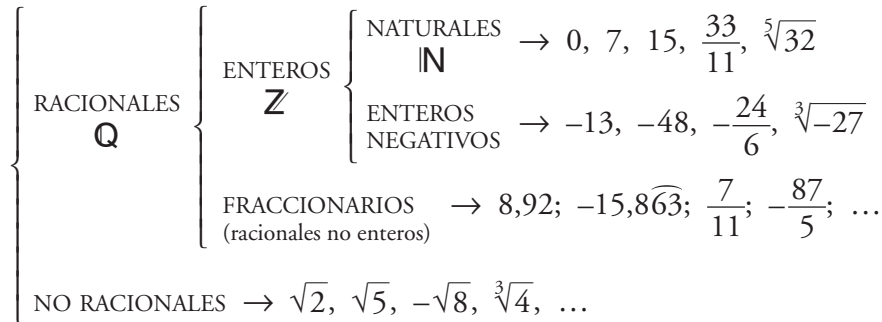


PÁGINA 20



Conocemos y manejamos varios conjuntos numéricos. Todos ellos están bien estructurados:

- Los naturales, \mathbb{N} .
- Si a estos les añadimos sus opuestos (negativos), obtenemos el conjunto de los enteros, \mathbb{Z} .
- Si a los enteros les añadimos los fraccionarios, obtenemos el conjunto de los racionales, \mathbb{Q} .
- Si a los racionales les añadimos los no racionales, ¿conseguiremos un conjunto bien estructurado?

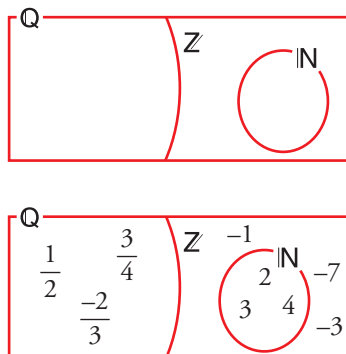
1 Escribe tres números naturales y tres números enteros que no sean naturales.

Por ejemplo: NATURALES ENTEROS NO NATURALES
 2, 3, 4 -1, -7, -3

2 Escribe tres números racionales que no sean enteros y tres números que no sean racionales.

Por ejemplo: RACIONALES NO ENTEROS NO RACIONALES
 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$ $\pi; \sqrt{2}; 0,1010010001\dots$

3 Sitúa los números anteriores en un esquema como este:



1 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 21

ANTES DE COMENZAR, RECUERDA

1 Halla la fracción irreducible equivalente a los siguientes números decimales y descompón en factores primos sus denominadores:

a) 6,388 b) 0,00875

$$a) 6,388 = \frac{6\,388}{1\,000} = \frac{2^2 \cdot 1\,597}{2^2 \cdot 250} = \frac{1\,597}{2 \cdot 5^3}$$

$$b) 0,00875 = \frac{875}{100\,000} = \frac{5^3 \cdot 7}{5^3 \cdot 800} = \frac{7}{2^5 \cdot 5^2}$$

2 Explica por qué las siguientes fracciones son equivalentes a números decimales exactos:

a) $\frac{3\,741}{100\,000}$ b) $\frac{3\,147}{1\,250}$ c) $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 91}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7}$ d) $\frac{57\,330}{10\,500}$

$$a) \frac{3\,741}{100\,000} = \frac{3\,741}{2^5 \cdot 5^5}$$

$$b) \frac{3\,147}{1\,250} = \frac{3\,147}{2 \cdot 5^4}$$

$$c) \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 91}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 91}{2 \cdot 5^2}$$

$$d) \frac{57\,330}{10\,500} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 273}{2^2 \cdot 5^3 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{273}{2 \cdot 5^2}$$

Son equivalentes a números decimales exactos porque en sus fracciones irreducibles los denominadores solo tienen factores 2 y 5.

3 Halla la fracción generatriz de:

a) $4,\widehat{8}$ b) $0,\widehat{051}$ c) $1,\widehat{23456}$ d) $7,\widehat{456}$

$$a) 4,\widehat{8} = \frac{48 - 4}{9} = \frac{44}{9}$$

$$b) 0,\widehat{051} = \frac{51}{990}$$

$$c) 1,\widehat{23456} = \frac{123\,456 - 123}{99\,900} = \frac{123\,333}{99\,900}$$

$$d) 7,\widehat{456} = \frac{7\,456 - 745}{900} = \frac{6\,711}{900}$$

4 Explica por qué las siguientes fracciones son equivalentes a números decimales periódicos:

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{20}{300}$ c) $\frac{37}{2 \cdot 5 \cdot 7}$ d) $\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19}$

a) $\frac{3}{7}$ es una fracción irreducible y su denominador, 7, es distinto de 2 y de 5.

b) $\frac{20}{300} = \frac{1}{3 \cdot 5}$. Hay un 3 en el denominador de su fracción irreducible.

c) $\frac{37}{2 \cdot 5 \cdot 7}$. Es una fracción irreducible, y hay un 7 en su denominador.

d) $\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19} = \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 19}$. En el denominador de su fracción irreducible hay un factor distinto de 2 y de 5, el 19.

PÁGINA 22

Hazlo tú

Prueba que $\sqrt{3}$ es irracional.

Supongamos que $\sqrt{3}$ es racional. En este caso lo podemos escribir así:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow 3b^2 = a^2$$

Al ser b^2 un cuadrado perfecto, contiene el factor 3 un número par de veces. Por tanto, $3b^2$ contiene el factor 3 un número impar de veces, lo cual es contradictorio con que a^2 ($a^2 = 3b^2$), por ser cuadrado perfecto, lo contendría un número par de veces.

Hazlo tú

Prueba que $3\sqrt{7} + 15$ es irracional.

Veamos primeramente que $\sqrt{7}$ es irracional. Si no lo fuese, podríamos escribir:

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b} \rightarrow 7b^2 = a^2$$

Razonando de forma similar al ejercicio anterior, llegaríamos a una contradicción, probando que, efectivamente, $\sqrt{7}$ es irracional.

Ahora llamamos $N = 3\sqrt{7} + 15 \rightarrow \sqrt{7} = \frac{N-15}{3}$

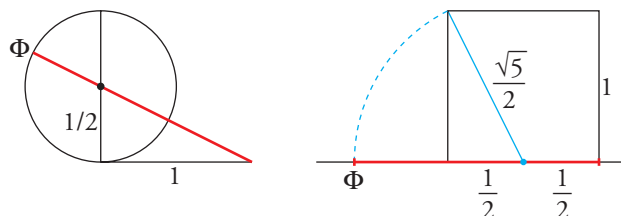
Si fuese N racional, $\frac{N-15}{3}$ también lo sería. Es decir, $\sqrt{7}$ sería racional, y no lo es.

Por tanto, $N = 3\sqrt{7} + 15$ es un número irracional.

1 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

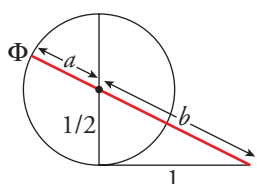
PÁGINA 23

1 Justifica que las construcciones siguientes:



dan un segmento de medida igual al número de oro:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

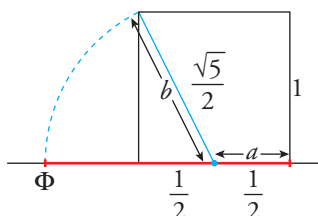


$$a = \frac{1}{2} \text{ (radio de la circunferencia)}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$



$$\Phi = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

2 Queremos demostrar que el número de oro, Φ , es irracional. Sabemos que $\sqrt{5}$ lo es (por lo mismo que $\sqrt{2}$). Observa que:

Si $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, entonces:

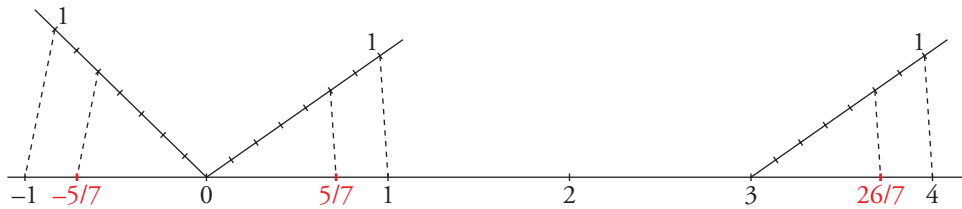
$$2\Phi = \sqrt{5} + 1 \rightarrow \sqrt{5} = 2\Phi - 1$$

De la igualdad $\sqrt{5} = 2\Phi - 1$, ¿qué deduciríamos si Φ fuera racional?

Si Φ fuese racional, $2\Phi - 1$ también sería racional, lo que contradice el que $\sqrt{5}$ es irracional.

PÁGINA 24

1 Representa $\frac{5}{7}$, $-\frac{5}{7}$ y $\frac{26}{7}$ en la recta real.



$$\frac{26}{7} = 3 + \frac{5}{7}$$

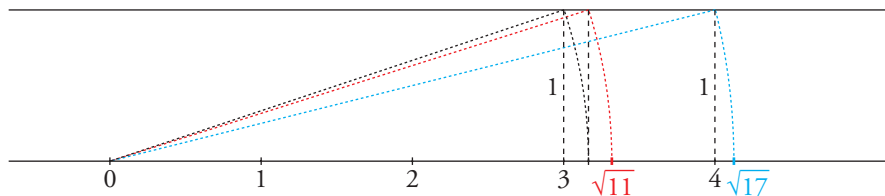
2 Justifica la construcción de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{10}$.

Representa $\sqrt{11}$ y $\sqrt{17}$ ($17 = 4^2 + 1^2$).

$\sqrt{2}$ es la diagonal de un cuadrado de lado 1, el cual podemos construir.

$\sqrt{3}$ es la diagonal de un rectángulo de lados 1 y $\sqrt{2}$, que podemos construir.

$\sqrt{10}$ es la diagonal de un rectángulo de lados 1 y 3, y lo podemos construir.



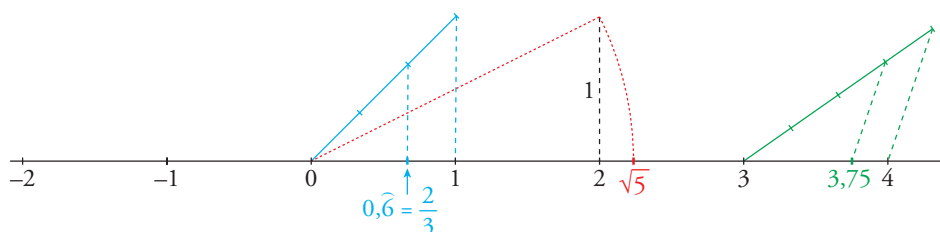
PÁGINA 25

3 Representa en la recta real los números:

a) -2 ; $3,75$; $\sqrt{5}$; $0,666\dots$ de forma exacta.

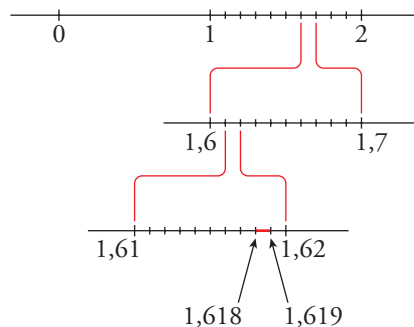
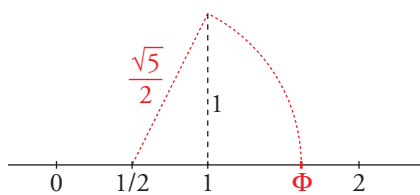
b) Φ de forma exacta $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ y aproximada (1,618...).

a)



1 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

b)



PÁGINA 27

1 Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:

a) Comprendidos entre 5 y 6, ambos incluidos.

b) Mayores que 7.

c) Menores o iguales que -5.

a) $[5, 6]$



b) $(7, +\infty)$



c) $(-\infty, -5]$



2 Escribe en forma de intervalo y representa:

a) $\{x / 3 \leq x < 5\}$

b) $\{x / x \geq 0\}$

c) $\{x / -3 < x < 1\}$

d) $\{x / x < 8\}$

a) $[3, 5)$



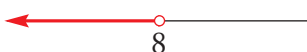
b) $[0, +\infty)$



c) $(-3, 1)$



d) $(-\infty, 8)$



1 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

3 Escribe en forma de desigualdad y representa:

- a) $(-1, 4]$ b) $[0, 6]$ c) $(-\infty, -4)$ d) $[9, +\infty)$

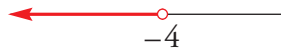
a) $\{x / -1 < x \leq 4\}$



b) $\{x / 0 \leq x \leq 6\}$



c) $\{x / x < -4\}$



d) $\{x / x \geq 9\}$



PÁGINA 28

Cálculo mental

1 Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$

b) $\sqrt[k]{-243} = -3$

c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$

d) $\sqrt[k]{1024} = 2$

a) $k = 2^3 = 8$

b) $-243 = (-3)^5 \rightarrow k = 5$

c) $k = \frac{2^4}{3^4}$

d) $1024 = 2^{10} \rightarrow k = 10$

2 Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt[5]{32}$

c) $\sqrt[5]{-32}$

d) $\sqrt[8]{0}$

e) $\sqrt[4]{81}$

f) $\sqrt[3]{125}$

a) -2

b) 2

c) -2

d) 0

e) 3

f) 5

1 Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[5]{x}$

b) $(\sqrt[3]{x^2})^5$

c) $\sqrt[15]{a^6}$

d) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$

f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

a) $x^{1/5}$

b) $x^{10/3}$

c) $a^{6/15}$

d) $(a^{13} - 6)^{1/2} = a^{7/2}$

e) $(x^{1/2})^{1/3} = x^{1/6}$

f) $(a^{k/m})^{1/n} = a^{k/m \cdot n}$

1 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

2 Calcula.

a) $4^{1/2}$

c) $625^{1/4}$

e) $64^{5/6}$

a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

c) $625^{1/4} = \sqrt[4]{625} = 5$

e) $64^{5/6} = \sqrt[6]{64^5} = 2^5$

b) $125^{1/3}$

d) $8^{2/3}$

f) $36^{3/2}$

b) $125^{1/3} = \sqrt[3]{125} = 5$

d) $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = 4$

f) $36^{3/2} = \sqrt{36^3} = 6^3 = 216$

3 Expresa en forma radical.

a) $x^{7/9}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$

a) $\sqrt[9]{x^7}$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3 b^2}$

b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$

d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$

b) $\sqrt[3]{(m \cdot n)^5}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{x^2}$

PÁGINA 29

Halla con la calculadora:

1 a) $\sqrt{541}$

a) $\sqrt{541} = 23,259406\dots$

b) $327^2 = 106\,929$

c) $\sqrt[3]{8,53} = 2,0432257\dots$

b) 327^2

c) $\sqrt[3]{8,53}$

2 a) $\sqrt[5]{8,24}$

a) $\sqrt[5]{8,24} = 1,5247036\dots$

b) $\sqrt[6]{586} = 2,8927857\dots$

c) $\sqrt[4]{79,46} = 2,9856379\dots$

b) $\sqrt[6]{586}$

c) $\sqrt[4]{79,46}$

3 a) $\sqrt[5]{37^2}$

a) $\sqrt[5]{37^2} = 4,2391686\dots$

b) $\sqrt[4]{2,1^5} = 2,5279828\dots$

c) $\sqrt[3]{0,008^2} = 0,04$

b) $\sqrt[4]{2,1^5}$

c) $\sqrt[3]{0,008^2}$

5 Simplifica.

a) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$

b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt[4]{a^3 b^5 c}}{\sqrt{ab^3 c^3}}$

d) $(\sqrt[3]{a^2})^6$

e) $(\sqrt{x})^3 \cdot (\sqrt[3]{x})$

f) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$

a) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{\frac{9^3}{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{\frac{16^2}{2^5}} = \sqrt[10]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3}$

c) $\frac{\sqrt[4]{a^3 b^5 c}}{\sqrt{ab^3 c^3}} = \sqrt[4]{\frac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\frac{a}{bc^5}} = \frac{1}{c} \sqrt[4]{\frac{a}{bc}}$

d) $(\sqrt[3]{a^2})^6 = a^{12/3} = a^4$

e) $(\sqrt{x})^3 \cdot \sqrt[3]{x} = x^{3/2} \cdot x^{1/3} = x^{11/6} = \sqrt[6]{x^{11}}$

f) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8 = (((2^{1/2})^{1/2})^{1/2})^8 = (2^{1/8})^8 = 2$

6 Efectúa.

$$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} &= \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = \\ &= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

PÁGINA 32**7 Racionaliza los denominadores.**

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$

e) $\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

f) $\frac{3}{2 - \sqrt{3}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{7}}{7}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2^2}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

d) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \sqrt[5]{3^3}}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}$

e) $\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} = 4(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

f) $\frac{3}{2 - \sqrt{3}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 6 + 3\sqrt{3}$

1 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 33

Cálculo mental

Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 340 000

b) 0,00000319

c) $25 \cdot 10^6$

d) $0,04 \cdot 10^9$

e) $480 \cdot 10^{-8}$

f) $0,05 \cdot 10^{-8}$

a) $340\,000 = 3,4 \cdot 10^5$

b) $0,00000319 = 3,19 \cdot 10^{-6}$

c) $25 \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^7$

d) $0,04 \cdot 10^9 = 4 \cdot 10^7$

e) $480 \cdot 10^{-8} = 4,8 \cdot 10^{-6}$

f) $0,05 \cdot 10^{-8} = 5 \cdot 10^{-10}$

PÁGINA 35

1 Toma 3,14 como valor aproximado de π .

Da una cota del error absoluto y otra del error relativo de este número irracional.

E.A. $< 0,005$

E.R. $< \frac{0,005}{3,14} < 0,00159 = 1,59 \cdot 10^{-3}$

2 Da el valor de 100Φ (recuerda que Φ es el número de oro) con 6 cifras significativas y acota el error absoluto y el error relativo que se comete.

$\Phi = 1,61803398874\dots$

Con seis cifras significativas, $100\Phi = 161,803$

E.A. $(100\Phi) < 0,0005$

E.R. $(100\Phi) < \frac{0,0005}{161,803} < 0,00000309 = 3,09 \cdot 10^{-6}$

3 La distancia de la Tierra al Sol es 149 000 000 km.

a) Exprésala en notación científica.

b) Exprésala en cm con dos cifras significativas.

c) Exprésala en cm con cuatro cifras significativas.

d) Acota los errores absoluto y relativo en los tres casos anteriores.

a) $1,49 \cdot 10^8$ km

b) $1,5 \cdot 10^{13}$ cm

c) $1,490 \cdot 10^{13}$ cm

1 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

$$\text{d) CASO a) } \begin{cases} \text{E.A.} < 0,005 \text{ cientos de millones de kilómetros.} \\ \text{E.R.} < \frac{0,005}{1,49} < 0,00336 \end{cases}$$

$$\text{CASO b) } \begin{cases} \text{E.A.} < 0,05 \text{ decenas de billones de centímetros.} \\ \text{E.R.} < \frac{0,05}{1,5} < 0,033 \end{cases}$$

$$\text{CASO c) } \begin{cases} \text{E.A.} < 0,0005 \text{ decenas de billones de centímetros.} \\ \text{E.R.} < \frac{0,0005}{1,490} < 0,000336 \end{cases}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 36

PRACTICA

Números reales

- 1 ■■■ a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?

$$-2; 1,7; \sqrt{3}; 4,\widehat{2}; -3,\widehat{75}; 3\pi; -2\sqrt{5}$$

- b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

- c) ¿Cuáles son racionales?

a) No pueden expresarse como cociente: $\sqrt{3}$; 3π y $-2\sqrt{5}$.

$$b) -2 = \frac{-4}{2}; 1,7 = \frac{17}{10}; 4,\widehat{2} = \frac{42-4}{9} = \frac{38}{9}; -3,\widehat{75} = -\frac{375-37}{90} = -\frac{338}{90} = -\frac{169}{45}$$

c) Son racionales: -2 ; $1,7$; $4,\widehat{2}$ y $-3,\widehat{75}$.

- 2 ■■■ a) Clasifica en racionales o irracionales los siguientes números:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}; 0,8\widehat{7}; -\sqrt{4}; -\frac{7}{3}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 2\pi$$

- b) Ordénalos de menor a mayor.

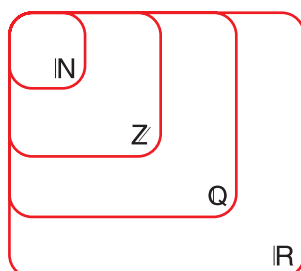
- c) ¿Cuáles son números reales?

a) Racionales: $0,8\widehat{7}$; $-\sqrt{4}$; $-\frac{7}{3}$ Irracionales: $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2π

$$b) -\frac{7}{3} < -\sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0,8\widehat{7} < 2\pi$$

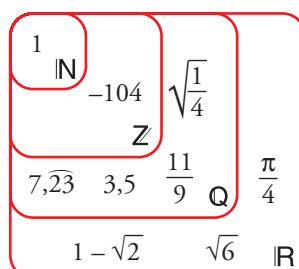
c) Todos son números reales.

- 3 ■■■ Sitúa los siguientes números en el diagrama adjunto:



$$1; 7,\widehat{23}; 1 - \sqrt{2}; 3,5$$

$$\frac{11}{9}; \sqrt{\frac{1}{4}}; \sqrt{6}; \frac{\pi}{4}; -104$$



1 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 4** ■■■ Indica a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} pertenece cada uno de los siguientes números:

$$-\frac{5}{4}; -3; \frac{13}{6}; \sqrt{5}; \sqrt{16}; 152; \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbb{N}: \sqrt{16}; 152$$

$$\mathbb{Z}: \sqrt{16}; 152, -3$$

$$\mathbb{Q}: \sqrt{16}; 152; -3; -\frac{5}{4}; \frac{13}{6}$$

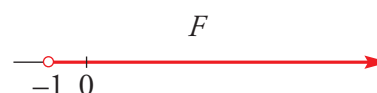
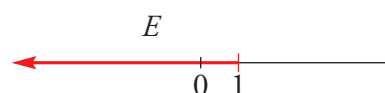
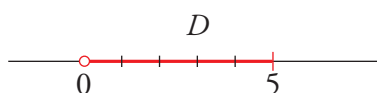
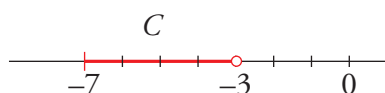
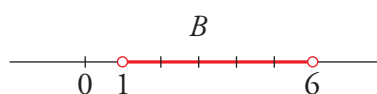
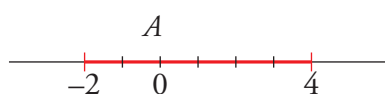
$$\mathbb{R}: -\frac{5}{4}; -3; \frac{13}{6}; \sqrt{5}; \sqrt{16}; 152 \text{ y } \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Intervalos y semirrectas

- 5** ■■■ Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:

$$A = [-2, 4] \quad B = (1, 6) \quad C = [-7, -3]$$

$$D = (0, 5] \quad E = (-\infty, 1] \quad F = (-1, +\infty)$$



- 6** ■■■ Escribe en forma de intervalo o semirrecta y representa en la recta real los números que cumplen la desigualdad indicada en cada caso:

a) $-3 \leq x \leq 2$

b) $-1 < x < 5$

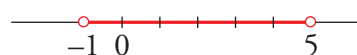
c) $0 < x \leq 7$

d) $x > -5$

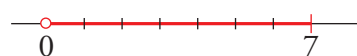
a) $[-3, 2]$



b) $(-1, 5)$



c) $(0, 7]$

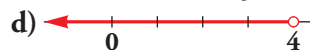


d) $(-5, +\infty)$



1 Soluciones a los ejercicios y problemas

7 ■■■ Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados.



a) $[-1, 3]$

$-1 \leq x \leq 3$

b) $(1, 5]$

$1 < x \leq 5$

c) $[-2, +\infty)$

$x \geq -2$

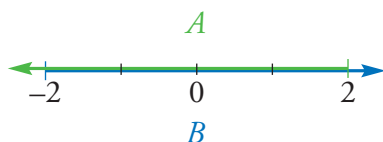
d) $(-\infty, 4)$

$x < 4$

8 ■■■ Representa en una misma recta las semirrectas:

$A = (-\infty, 2]$ y $B = [-2, +\infty)$

¿Cuáles son los números que pertenecen a A y a B ($A \cap B$)? Exprésalo como un intervalo.



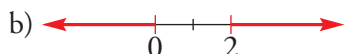
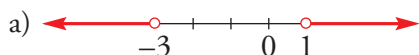
$A \cap B = [-2, 2]$

9 ■■■ Resuelto en el libro de texto.

10 ■■■ Representa en la recta real:

a) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

b) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$



Números aproximados. Notación científica

11 ■■■ Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de cada una de las aproximaciones siguientes sobre los presupuestos de algunos equipos deportivos:

a) 128 mil euros

b) 25 millones de euros

c) 648 500 €

d) 3 200 €

a) Error absoluto < 500 €

b) Error absoluto < 500 000 €

Error relativo < 0,0039

Error relativo < 0,02

c) Error absoluto < 50 €

d) Error absoluto < 50 €

Error relativo < 0,000077

Error relativo < 0,0156

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

12 ■■■ Expresa con un número razonable de cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo de la aproximación que des.

a) Oyentes de un programa de radio: 843 754

b) Precio de un coche: 28 782 €

c) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,0375 segundos.

d) Gastos de un ayuntamiento: 48 759 450 €

a) 840 000 oyentes $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 5\,000 \\ \text{Error relativo} < 0,0059 \end{cases}$

b) 29 000 € $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 500 \\ \text{Error relativo} < 0,017 \end{cases}$

c) 0,04 segundos $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 0,005 \\ \text{Error relativo} < 0,13 \end{cases}$

d) 49 000 000 € $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 500\,000 \\ \text{Error relativo} < 0,01 \end{cases}$

13 ■■■ Escribe en notación científica.

a) 752 000 000

b) 0,0000512

c) 0,000007

d) 15 000 000 000

a) $7,52 \cdot 10^8$

b) $5,12 \cdot 10^{-5}$

c) $7 \cdot 10^{-6}$

d) $1,5 \cdot 10^{10}$

PÁGINA 37

14 ■■■ Expresa en notación científica.

a) $32 \cdot 10^5$

b) $75 \cdot 10^{-4}$

c) $843 \cdot 10^7$

d) $458 \cdot 10^{-7}$

e) $0,03 \cdot 10^6$

f) $0,0025 \cdot 10^{-5}$

a) $3,2 \cdot 10^6$

b) $7,5 \cdot 10^{-3}$

c) $8,43 \cdot 10^9$

d) $4,58 \cdot 10^{-5}$

e) $3 \cdot 10^4$

f) $2,5 \cdot 10^{-8}$

15 ■■■ Da una cota del error absoluto de cada una de las siguientes aproximaciones y compara sus errores relativos.

a) $8 \cdot 10^5$

b) $5,23 \cdot 10^6$

c) $1,372 \cdot 10^7$

d) $2,5 \cdot 10^{-4}$

e) $1,7 \cdot 10^{-6}$

f) $4 \cdot 10^{-5}$

a) $5 \cdot 10^4$

b) $5 \cdot 10^3$

c) $5 \cdot 10^3$

d) $5 \cdot 10^{-6}$

e) $5 \cdot 10^{-8}$

f) $5 \cdot 10^{-6}$

El menor error relativo se da en c) y el mayor, en f).

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

16 ■■■ Calcula mentalmente.

a) $(1,5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$

c) $(4 \cdot 10^{-7}) : (2 \cdot 10^{-12})$

a) $3 \cdot 10^{12}$

c) $2 \cdot 10^5$

b) $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{11})$

d) $\sqrt{4 \cdot 10^8}$

b) $1,5 \cdot 10^{-5}$

d) $2 \cdot 10^4$

17 ■■■ Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.

a) $(3,5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$

c) $(1,2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$

a) $14 \cdot 10^{15} = 1,4 \cdot 10^{16}$

c) $0,24 \cdot 10^{13} = 2,4 \cdot 10^{12}$

b) $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2,5 \cdot 10^5)$

d) $(6 \cdot 10^{-7})^2$

b) $12,5 \cdot 10^{-3} = 1,25 \cdot 10^{-2}$

d) $36 \cdot 10^{-14} = 3,6 \cdot 10^{-13}$

18 ■■■ Efectúa a mano utilizando la notación científica y comprueba después con la calculadora.

a) $5,3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11}$

b) $3 \cdot 10^{-5} + 8,2 \cdot 10^{-6}$

c) $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$

d) $7,2 \cdot 10^8 + 1,5 \cdot 10^{10}$

a) $53 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{11} = 50 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{12}$

b) $30 \cdot 10^{-6} + 8,2 \cdot 10^{-6} = 38,2 \cdot 10^{-6} = 3,82 \cdot 10^{-5}$

c) $6 \cdot 10^{-9} - 50 \cdot 10^{-9} = -44 \cdot 10^{-9} = -4,4 \cdot 10^{-8}$

d) $7,2 \cdot 10^8 + 150 \cdot 10^8 = 157,2 \cdot 10^8 = 1,572 \cdot 10^{10}$

19 ■■■ Expresa el resultado de las siguientes operaciones en notación científica con 3 cifras significativas como máximo:

a) $(2,8 \cdot 10^{-5}) : (6,2 \cdot 10^{-12})$

b) $(7,2 \cdot 10^{-6})^3 : (5,3 \cdot 10^{-9})$

c) $7,86 \cdot 10^5 - 1,4 \cdot 10^6 + 5,2 \cdot 10^4$

d) $(3 \cdot 10^{-10} + 7 \cdot 10^{-9}) : (7 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^5)$

a) $4,52 \cdot 10^6$

c) $-5,62 \cdot 10^5$

b) $7,04 \cdot 10^{-8}$

d) $1,12 \cdot 10^{-15}$

Potencias y raíces

20 ■■■ Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[5]{x^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$

a) $x^{2/5}$

e) $(-3)^{3/5}$

b) $\sqrt{2}$

f) $\sqrt[4]{a}$

b) $2^{1/2}$

f) $a^{1/4}$

c) $\sqrt[3]{10^6}$

g) $(\sqrt[5]{x^{-2}})^3$

c) 10^2

g) $x^{-6/5}$

d) $\sqrt[4]{20^2}$

h) $\sqrt[15]{a^5}$

d) $20^{1/2}$

h) $a^{1/3}$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

21 ■■■ Pon en forma de raíz.

- | | | |
|--------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| a) $5^{1/2}$ | b) $(-3)^{2/3}$ | c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$ |
| d) $(a^3)^{1/4}$ | e) $(a^{1/2})^{1/3}$ | f) $(a^{-1})^{3/5}$ |
| a) $\sqrt{5}$ | b) $\sqrt[3]{(-3)^2}$ | c) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ |
| d) $\sqrt[4]{a^3}$ | e) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ | f) $\sqrt[5]{a^{-3}}$ |

22 ■■■ Obtén con la calculadora.

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|---|
| a) $\sqrt[3]{-127}$ | b) $\sqrt[5]{0,2^{-3}}$ | c) $\sqrt[4]{\left(\frac{13}{9}\right)^3}$ |
| d) $12^{-2/3}$ | e) $\sqrt[6]{3^{-5}}$ | f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}}$ |
| a) $\sqrt[3]{-127} \approx -5,03$ | b) $\sqrt[5]{0,2^{-3}} \approx 2,63$ | c) $\sqrt[4]{\left(\frac{13}{9}\right)^3} \approx 1,32$ |
| d) $12^{-2/3} \approx 0,19$ | e) $\sqrt[6]{3^{-5}} \approx 0,4$ | f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}} \approx 0,64$ |

23 ■■■ Resuelto en el libro de texto.

24 ■■■ Expresa como potencia única.

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|---|
| a) $\sqrt{2} \sqrt[3]{4}$ | b) $3 \sqrt[3]{9}$ | c) $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$ |
| d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}$ | e) $\sqrt[5]{\sqrt{a}}$ | f) $\sqrt[3]{m^2} : (m \cdot \sqrt{m})$ |
| a) $2^{1/2} \cdot 2^{2/3} = 2^{7/6}$ | b) $3 \cdot 3^{2/3} = 3^{5/3}$ | c) $5^{2/3} : 5^{1/2} = 5^{1/6}$ |
| d) $a^{1/2} \cdot a^{2/5} = a^{9/10}$ | e) $a^{1/10}$ | f) $m^{2/3} : (m \cdot m^{1/2}) = m^{-5/6}$ |

Radicales

25 ■■■ Simplifica.

- | | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------------|
| a) $\sqrt[4]{3^2}$ | b) $\sqrt[12]{a^8}$ | c) $\sqrt[5]{a^{15}}$ |
| d) $\sqrt[8]{a^2 b^4}$ | e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^8}}$ | f) $\sqrt[3]{a^6 b^9}$ |
| a) $\sqrt{3}$ | b) $\sqrt[3]{a^2}$ | c) a^3 |
| d) $\sqrt[4]{ab^2}$ | e) $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ | f) $a^2 b^3$ |

26 ■■■ Multiplica y simplifica.

- | | | |
|---|--|------------------------------------|
| a) $\sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{6}$ | b) $\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a^4} \sqrt[3]{a}$ | c) $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ |
| a) $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$ | | |
| b) $\sqrt[3]{a^6} = a^2$ | | |
| c) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$ | | |

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

27 ■■■ Extrae del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{16a^3}$

b) $\sqrt[4]{81a^5b^3}$

c) $\sqrt{8a^5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{24}{a^4}}$

e) $\sqrt{\frac{162}{75}}$

f) $\sqrt[5]{\frac{9}{32}}$

a) $2a^3\sqrt{2}$

b) $3a^4\sqrt{ab^3}$

c) $2a^2\sqrt{2a}$

d) $\frac{2}{a}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}$

e) $\frac{9}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$

f) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{9}$

28 ■■■ Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los radicales siguientes:

$$\sqrt{7}, \sqrt[3]{30}, \sqrt[4]{40}, \sqrt[6]{81}$$

$$\text{mín.c.m. } (2, 3, 4, 6) = 12$$

$$\sqrt{7} = \sqrt[12]{7^6} = \sqrt[12]{117649}$$

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[12]{30^4} = \sqrt[12]{810000}$$

$$\sqrt[4]{40} = \sqrt[12]{40^3} = \sqrt[12]{64000}$$

$$\sqrt[6]{81} = \sqrt[12]{81^2} = \sqrt[12]{6561}$$

$$\sqrt[6]{81} < \sqrt[4]{40} < \sqrt{7} < \sqrt[3]{30}$$

29 ■■■ Introduce dentro de la raíz y simplifica.

a) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $\frac{\sqrt{18}}{3}$

c) $2\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$

e) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$

f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

a) $\sqrt{\frac{5^2 \cdot 3}{5}} = \sqrt{15}$

b) $\sqrt{\frac{18}{3^2}} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 7}{4}} = \sqrt[3]{14}$

d) $\sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot 5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{12}{2^2}} = \sqrt{3}$

f) $\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 9}{3^3 \cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 38

30 ■■■ Divide y simplifica.

$$\text{a) } \sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}} \qquad \text{b) } \sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}} \qquad \text{c) } \sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{2}}$$

$$\text{a) } \sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}} = \sqrt{7 : \frac{21}{5}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5} : \frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6} : \frac{45}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

31 ■■■ Reduce a índice común y efectúa.

$$\text{a) } \sqrt[5]{6} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{4} : \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[6]{20} : \sqrt[4]{10}$$

$$\text{d) } (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) : (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3})$$

$$\text{a) } \sqrt[10]{6^2 \cdot 3^5} = \sqrt[10]{8748}$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[12]{20^2 : 10^3} = \sqrt[12]{\frac{4}{10}} = \sqrt[12]{\frac{2}{5}}$$

$$\text{d) } \sqrt[6]{(2^3 \cdot 3^2) : (2^2 \cdot 3^3)} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

32 ■■■ Resuelto en el libro de texto.

33 ■■■ Efectúa.

$$\text{a) } \sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$$

$$\text{c) } \sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63}$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2}$$

$$\text{e) } \sqrt{108} - 2\sqrt{12} - \sqrt{28} + \sqrt{7/4}$$

$$\text{a) } \sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{c) } \sqrt{2^2 \cdot 7} - \sqrt{7} + \sqrt{3^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\text{e) } \sqrt{2^2 \cdot 3^3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 7} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

34 ■■■ Efectúa.

a) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

c) $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$

a) $4 - 3 = 1$

c) $5 - 4 \cdot 3 = -7$

b) $(3\sqrt{2} + 2)^2$

d) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

b) $9 \cdot 2 + 4 + 12\sqrt{2} = 22 + 12\sqrt{2}$

d) $4 \cdot 5 + 3 - 4\sqrt{15} = 23 - 4\sqrt{15}$

35 ■■■ Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{3}{\sqrt{15}}$

d) $\frac{4}{\sqrt{12}}$

e) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$

f) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

a) $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$

c) $\frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\frac{4\sqrt{12}}{12} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{3\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

f) $\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

36 ■■■ Racionaliza y simplifica si es posible.

a) $\frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

b) $\frac{3}{1 + \sqrt{3}}$

c) $\frac{14}{3 - \sqrt{2}}$

d) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

e) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 3}$

g) $\frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

i) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

a) $\frac{(1 + \sqrt{6})\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{18}}{6} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$

b) $\frac{3(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{3 - 3\sqrt{3}}{-2} = \frac{-3 + 3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{14(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{42 + 14\sqrt{2}}{7} = 6 + 2\sqrt{2}$

d) $\frac{(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{1 + 2 + 2\sqrt{2}}{-1} = -3 - 2\sqrt{2}$

e) $\frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{4 \cdot 5 - 9} = 2\sqrt{5} - 3$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

f)
$$\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} + 3)}{4 \cdot 2 - 9} = \frac{2 \cdot 2 + 3\sqrt{2}}{-1} = -4 - 3\sqrt{2}$$

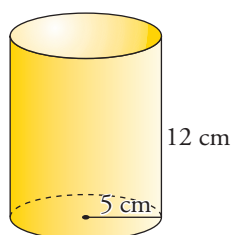
g)
$$\frac{10(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4 \cdot 3 - 2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

h)
$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2 - 3} = \frac{\sqrt{6} - 3}{-1} = -\sqrt{6} + 3$$

i)
$$\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{5 + 3 - 2\sqrt{15}}{2} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$$

PIENSA Y RESUELVE

- 37** $\square\square\square$ Halla el área total y el volumen de un cilindro de 5 cm de radio y 12 cm de altura. Da su valor exacto en función de π .



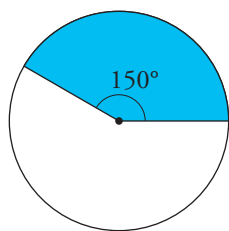
$$\text{Área lateral} = 2\pi R h = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área base} = \pi R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 120\pi + 2 \cdot 25\pi = 170\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 300\pi \text{ cm}^3$$

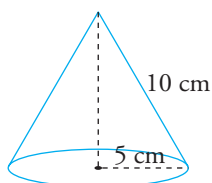
- 38** $\square\square\square$ En un círculo cuya circunferencia mide 30π m, cortamos un sector circular de 150° de amplitud. Halla el área de ese sector dando su valor exacto en función de π .



$$\text{Radio del círculo: } 2\pi R = 30\pi \rightarrow R = 15 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow \pi \cdot 15^2 \\ 150^\circ \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Área} = \frac{150^\circ \cdot 15^2 \pi}{360^\circ} = \frac{375\pi}{4} \text{ m}^2$$

- 39** $\square\square\square$ Calcula el área total y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 cm de generatriz. Da el valor exacto.



$$\text{Altura} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Área lateral} = \pi R g = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 50\pi \text{ cm}^2$$

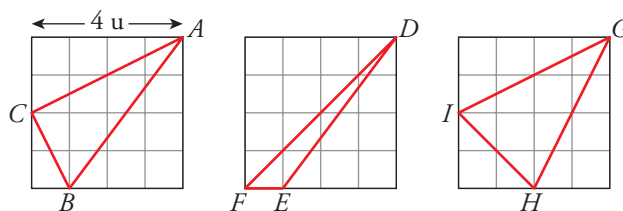
$$\text{Área base} = \pi R^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 50\pi + 25\pi = 75\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 40** ■■■ Calcula el perímetro de los triángulos ABC , DEF y GHI . Expresa el resultado con radicales.



$$ABC \quad \overline{AC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \quad \overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \quad \overline{BC} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Perímetro de } ABC = 2\sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5} \text{ u}$$

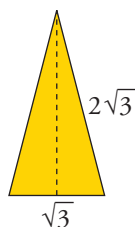
$$DFE \quad \overline{DF} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}; \quad \overline{DE} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \quad \overline{FE} = 1$$

$$\text{Perímetro de } DFE = 4\sqrt{2} + 5 + 1 = 6 + 4\sqrt{2} \text{ u}$$

$$GHI \quad \overline{GH} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \quad \overline{GI} = \overline{GH} = 2\sqrt{5}; \quad \overline{HI} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Perímetro de } GHI = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2} \text{ u}$$

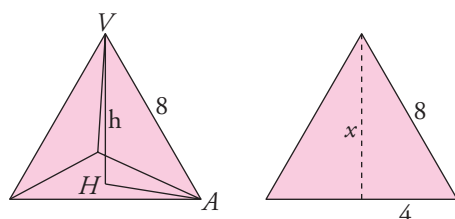
- 41** ■■■ Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.



$$\text{Altura} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{12 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$$

- 42** ■■■ Calcula la altura de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Da su valor exacto.



Altura de una cara:

$$x = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

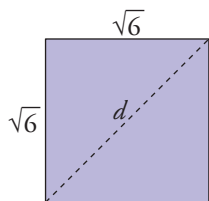
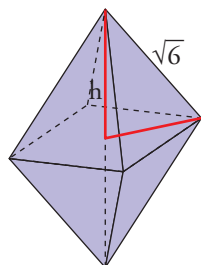
$$\overline{AH} = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Altura del tetraedro:

$$h = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{128}{3}} = \sqrt{\frac{2^7}{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 43** ■■■ Calcula el volumen de un octaedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Da su valor exacto.



$$d = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\frac{d}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Altura de la pirámide} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Volumen del octaedro} = 2 \left(\frac{1}{3} (\sqrt{6})^2 \sqrt{3} \right) = 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

- 44** ■■■ Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x-7}$ b) $\sqrt{5-x}$ c) $\sqrt{-x}$ d) $\sqrt{x^2+1}$

a) $x-7 \geq 0 \rightarrow x \geq 7 \rightarrow x \in [7, +\infty)$

b) $5-x \geq 0 \rightarrow -x \geq -5 \rightarrow x \leq 5 \rightarrow x \in (-\infty, 5]$

c) $-x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0]$

d) $x^2 + 1 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$

- 45** ■■■ Comprueba que los números $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$.

$$\bullet (3 + \sqrt{2})^2 - 6(3 + \sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 + 6\sqrt{2} - 18 - 6\sqrt{2} + 7 = 0$$

$$\bullet (3 - \sqrt{2})^2 - 6(3 - \sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 - 6\sqrt{2} - 18 + 6\sqrt{2} + 7 = 0$$

- 46** ■■■ ¿Cuál de los números $1 - \sqrt{3}$ o $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ es solución de la ecuación

$$2x^2 - 2x - 1 = 0?$$

$$\bullet 2(1 - \sqrt{3})^2 - 2(1 - \sqrt{3}) - 1 = 2(1 + 3 - 2\sqrt{3}) - 2 + 2\sqrt{3} - 1 = \\ = 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} - 1 \neq 0$$

El número $1 - \sqrt{3}$ no es solución de la ecuación.

$$\bullet 2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}\right) - 1 - \sqrt{3} - 1 = \\ = 2 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 = 0$$

El número $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ sí es solución de la ecuación.

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 39

47 ■■■ Halla el valor exacto de las siguientes expresiones en el caso en que

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2}:$$

a) $\frac{(1-2m)^2}{2}$ b) $\sqrt{1-m^2}$ c) $\frac{1+m}{1-m}$

$$\text{a) } \frac{\left(1 - 2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = \frac{1 + 3 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \frac{1 + \sqrt{3}/2}{1 - \sqrt{3}/2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = \frac{4 + 3 + 4\sqrt{3}}{1} = 7 + 4\sqrt{3}$$

48 ■■■ Calcula utilizando la notación científica. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto cometido en cada caso:

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$ b) $\frac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0,00015 - 0,00003}$

c) $(0,0073)^{-2} \cdot (0,0003)^{-3}$ d) $(4,5 \cdot 10^{12}) : (0,000837)$

a) $(3,30 \cdot 10^{19}) : (1,44 \cdot 10^8) = 2,29 \cdot 10^{11}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^8$

b) $\frac{2,70 \cdot 10^6 - 1,30 \cdot 10^7}{1,50 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5}} = -8,58 \cdot 10^{10}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^7$

c) $(1,88 \cdot 10^4) \cdot (3,70 \cdot 10^{10}) = 6,96 \cdot 10^{14}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{11}$

d) $(4,5 \cdot 10^{12}) : (8,37 \cdot 10^{-4}) = 5,38 \cdot 10^{15}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{12}$

49 ■■■ Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}-1} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}+1}$ b) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2})$

c) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5}$

$$\text{a) } \frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{3-1} + \frac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{10+6\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{3}-10}{2} = \\ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

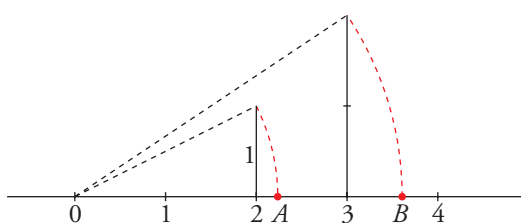
1 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\begin{aligned} \text{b) } \left[\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3} \right] \cdot (3+2\sqrt{2}) &= \frac{9-2\sqrt{18}}{3} \cdot (3+2\sqrt{2}) = \\ &= \frac{27+18\sqrt{2}-6\sqrt{18}-4 \cdot 6}{3} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{5+1+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5} &= \frac{(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{5-1} - 3\sqrt{5} = \frac{8\sqrt{5}+16}{4} - 3\sqrt{5} = \\ &= 2\sqrt{5}+4-3\sqrt{5} = 4-\sqrt{5} \end{aligned}$$

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

50 ■■■ ¿Qué números representan los puntos A y B ?



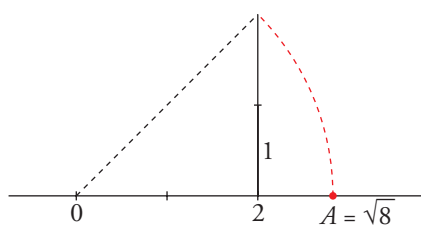
$$A = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$B = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

51 ■■■ Explica un procedimiento para construir un segmento que mida exactamente:

a) $\sqrt{8}$

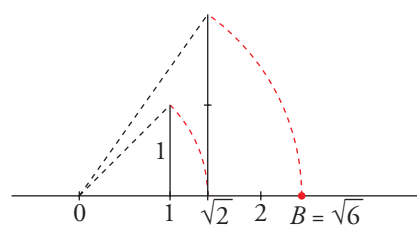
a)



$$A = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

b) $\sqrt{6}$

b)



$$B = \sqrt{6} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2}$$

52 ■■■ ¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?

$$\sqrt[3]{-20}; \sqrt[6]{2^{-3}}; \sqrt{-1}; \sqrt[5]{0,001}; \sqrt[4]{-81}$$

No existen ni $\sqrt{-1}$ ni $\sqrt[4]{-81}$.

53 ■■■ ¿Cuántos números racionales hay entre $0,\widehat{7}$ y $0,\widehat{8}$? ¿Y cuántos irracionales? Pon ejemplos.

Hay infinitos racionales e infinitos irracionales.

Racionales entre $0,\widehat{7}$ y $0,\widehat{8}$: $0,79$; $0,78$; $0,786$;...

Irracionales: $0,791791179111\dots$; $0,828228222\dots$; $\frac{\sqrt{17}}{5}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$;...

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

54 ■■■ ¿Cuáles son los números que pertenecen a $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$?

Todos los números reales excepto el 3.

55 ■■■ Escribe, en cada caso, un número racional y otro irracional comprendidos entre los dos que se dan:

a) $\sqrt{2}$ y 2

b) $1,\overline{3}$ y $1,\overline{4}$

c) $1,\overline{23}$ y $1,\overline{24}$

d) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

a) Racional: $1,5 = \frac{3}{2}$ Irracional: $\frac{\sqrt{10}}{2}$

b) Racional: 1,35 Irracional: $\sqrt{2}$

c) Racional: 1,235 Irracional: $\sqrt{1,54}$

d) Racional: 1,5 Irracional: $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

56 ■■■ Escribe dos números racionales uno mayor y otro menor que $\sqrt{2}$ que se diferencien de él en menos de una milésima.

Menor que $\sqrt{2} \rightarrow 1,4141$

Mayor que $\sqrt{2} \rightarrow 1,4143$

57 ■■■ ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado tienen soluciones irracionales?

a) $x^2 - 2 = 0$

b) $9x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 + 4 = 0$

d) $x^2 - 18 = 0$

e) $x^2 - 2x - 2 = 0$

f) $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2} = 0$

a) $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$ son irracionales.

b) $x = \pm \frac{5}{3}$ son racionales.

c) No tiene solución.

d) $x = \pm \sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$ son irracionales.

e) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$ son irracionales.

f) $x = \pm 2$ son racionales.

58 ■■■ Justifica que $\frac{\sqrt{18}}{3}$, $\frac{8}{\sqrt{32}}$, $\sqrt[4]{4}$ y $2^{1/2}$ representan el mismo número irracional.

¿Es posible que $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$ represente ese mismo número?

$$\frac{\sqrt{18}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}; \quad \frac{8}{\sqrt{32}} = \frac{8\sqrt{32}}{32} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{2}}{32} = \sqrt{2}; \quad \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}; \quad 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\begin{aligned}\frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2)}{27 - 4} &= \frac{9\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} = \\ &= \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

59 ■■■ ¿Cuáles de los siguientes números no están expresados en notación científica?

$$3,14 \cdot 10^{-17}; 1,32^{12}; 437 \cdot 10^7; 0,82 \cdot 10^3$$

No están en notación científica: $1,32^{12}$; $437 \cdot 10^7$; $0,82 \cdot 10^3$

PROFUNDIZA

60 ■■■ Ordena de menor a mayor en el caso $a \in (0, 1)$ y en el caso $a \in (1, +\infty)$.

$$\sqrt{a}; \frac{1}{a}; a^2; a$$

$$\text{Si } a \in (0, 1), \quad a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$$

$$\text{Si } a \in (1, +\infty), \quad \frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$$

61 ■■■ Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{(x-3)(x+3)}$

b) $\sqrt{x(4-x)}$

c) $\sqrt{x^2 + x - 6}$

d) $\sqrt{(x+1)(x-5)}$

a) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b) $[0, 4]$

c) $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

d) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

62 ■■■ Prueba que $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

Elevamos al cuadrado.

$$(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

63 ■■■ Justifica que $\sqrt[4]{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{x}$.

$$\sqrt[4]{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[8]{x^2 \cdot x^{2/3}} = \sqrt[8]{\sqrt[3]{x^6} \cdot x^2} = \sqrt[24]{x^8} = \sqrt[3]{x}$$