

PÁGINA 114

PRACTICA

Ecuaciones: soluciones por tanteo

1 ■■■ ¿Es 3 o -2 solución de alguna de las siguientes ecuaciones? Compruébalo.

a) $\frac{3-x}{5} + \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$

b) $2^x + 2^{x-1} - 2^{x+1} = -4$

c) $(2-x)^3 + 3x = x^2 - 1$

d) $\sqrt{14-x} = 4$

a) $x = 3 \rightarrow \frac{3-3}{5} + \frac{3}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow 0 + 1 = \frac{1}{3} \rightarrow 3$ no es solución.

$x = -2 \rightarrow \frac{3-(-2)}{5} + \frac{-2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow -2$ sí es solución.

b) $x = 3 \rightarrow 2^3 + 2^2 - 2^4 = 8 + 4 - 16 = -4 \rightarrow 3$ es solución.

$x = -2 \rightarrow 2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \neq -4 \rightarrow -2$ no es solución.

c) $x = 3 \rightarrow \left. \begin{array}{l} (2-3)^3 + 3 \cdot 3 = -1 + 9 = 8 \\ 3^2 - 1 = 8 \end{array} \right\} \rightarrow 3$ es solución.

$x = -2 \rightarrow \left. \begin{array}{l} (2-(-2))^3 + 3(-2) = 64 - 6 = 58 \\ (-2)^2 - 1 = 3 \end{array} \right\} \rightarrow -2$ no es solución.

d) $x = 3 \rightarrow \sqrt{14-3} \neq 4 \rightarrow 3$ no es solución.

$x = -2 \rightarrow \sqrt{14-(-2)} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow -2$ es solución.

3 ■■■ Resuelve mentalmente y explica el proceso que has seguido.

a) $(x-2)^2 = 100$

b) $7 - \frac{x+2}{3} = 4$

c) $\frac{5x-13}{4} = 3$

d) $\frac{x^4+2}{3} = 6$

e) $3 - 2^{x-5} = 2$

f) $\sqrt{x-7} = 5$

a) $x - 2$ puede ser 10 o -10 $\left\langle \begin{array}{l} x - 2 = 10 \rightarrow x = 12 \\ x - 2 = -10 \rightarrow x = -8 \end{array} \right.$

b) $\frac{x+2}{3}$ tiene que ser igual a 3 $\rightarrow x+2$ tiene que valer 9 $\rightarrow x = 7$

c) $5x - 13$ tiene que ser igual a 12 $\rightarrow 5x$ tiene que ser igual a 25 $\rightarrow x = 5$

d) $x^4 + 2$ tiene que ser igual a 18 $\rightarrow x^4$ tiene que valer 16 $\rightarrow x = 2$ o $x = -2$

e) 2^{x-5} tiene que valer 1 $\rightarrow x - 5$ tiene que ser igual a 0 $\rightarrow x = 5$

f) $x - 7$ tiene que ser 25 $\rightarrow x = 32$

4 ■■■ Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $3^{x-5} = 27$

b) $\sqrt{x+9} = 13$

c) $(x+1)^3 = 216$

d) $x^3 - x^2 - x = 15$

a) $x = 8$

b) $x = 160$

c) $x = 5$

d) $x = 3$

5 ■■■ Busca por tanteo una solución aproximada de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 = 381$

b) $x^4 - x^2 = 54$

c) $x - \sqrt{x+5} = 0$

d) $3^{x-1} = 0,005$

e) $5^x = 0,32$

f) $x^{0,75} = 17$

a) $x \approx 7,25$

b) $x \approx 4,14$

c) $x \approx 3$

d) $x \approx -4$

e) $x \approx -0,7$

f) $x \approx 44$

Ecuaciones de primer grado

6 ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución de cada una:

a) $3x - 2(x+3) = x - 3(x+1)$

b) $4 + x - 4(1-x) + 5(2+x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x-1) = 3(x+3)$

d) $4(2x-7) - 3(3x+1) = 2 - (7-x)$

a) $3x - 2(x+3) = x - 3(x+1) \rightarrow 3x - 2x - 6 = x - 3x - 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$

Comprobación: $3 \cdot 1 - 2(1+3) = 1 - 3(1+1) \rightarrow -5 = -5$

b) $4 + x - 4(1-x) + 5(2+x) = 0 \rightarrow 4 + x - 4 + 4x + 10 + 5x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 10x = -10 \rightarrow x = -1$

Comprobación: $4 - 1 - 4(1+1) + 5(2-1) = 4 - 1 - 8 + 5 = 0$

c) $2x + 7 - 2(x-1) = 3(x+3) \rightarrow 2x + 7 - 2x + 2 = 3x + 9 \rightarrow 0 = 3x \rightarrow x = 0$

Comprobación: $2 \cdot 0 + 7 - 2(0-1) = 3 \cdot (0+3) \rightarrow 9 = 9$

d) $4(2x-7) - 3(3x+1) = 2 - (7-x) \rightarrow 8x - 28 - 9x - 3 = 2 - 7 + x \rightarrow$

$\rightarrow -2x = 26 \rightarrow x = -13$

Comprobación: $4[2(-13) - 7] - 3[3(-13) + 1] = 2 - [7 - (-13)] \rightarrow$

$\rightarrow -132 + 114 = 2 - 20 \rightarrow -18 = -18$

7 ■■■ Comprueba si estas dos ecuaciones son equivalentes:

$$2(x-1) + x + 1 = 2x + 1 \quad 2x - 1 - (x-1) = 2(3x-5)$$

• $2(x-1) + x + 1 = 2x + 1 \rightarrow 2x - 2 + x + 1 = 2x + 1 \rightarrow x = 2$

• $2x - 1 - (x-1) = 2(3x-5) \rightarrow 2x - 1 - x + 1 = 6x - 10 \rightarrow -5x = -10 \rightarrow$
 $\rightarrow x = 2$

Son equivalentes, porque tienen la misma solución.

8 ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(2 - 3x) - 3(3 - 2x) = 4(x + 1) + 3(4 - 5x)$

b) $\frac{x-3}{5} = \frac{x+1}{3} - 2$

c) $1 = \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2}$

d) $\frac{3x+4}{5} = \frac{x+2}{2}$

e) $\frac{5x-16}{6} = -\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3}$

f) $\frac{2x-4}{3} = 3 - \frac{4+x}{2}$

a) $2(2 - 3x) - 3(3 - 2x) = 4(x + 1) + 3(4 - 5x)$

$$4 - 6x - 9 + 6x = 4x + 4 + 12 - 15x \rightarrow 11x = 21 \rightarrow x = \frac{21}{11}$$

b) $\frac{x-3}{5} = \frac{x+1}{3} - 2 \rightarrow 15\left(\frac{x-3}{5}\right) = 15\left(\frac{x+1}{3} - 2\right)$

$$3(x-3) = 5(x+1) - 30 \rightarrow 3x-9 = 5x+5-30 \rightarrow 16 = 2x \rightarrow x = 8$$

c) $1 = \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2} \rightarrow 6 \cdot 1 = 6\left(\frac{x+3}{3} - \frac{x}{2}\right) \rightarrow 6 = 2(x+3) - 3x \rightarrow$

$$\rightarrow 6 = 2x + 6 - 3x \rightarrow x = 0$$

d) $\frac{3x-4}{5} = \frac{x+2}{2} \rightarrow 2(3x-4) = 5(x+2) \rightarrow 6x-8 = 5x+10 \rightarrow x = 18$

e) $\frac{5x-16}{6} = -\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3} \rightarrow 12\left(\frac{5x-16}{6}\right) = 12\left(-\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow 2(5x-16) = -(x+8) + 4(x+1) \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x-32 = -x-8+4x+4 \rightarrow 7x = 28 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 4$$

f) $\frac{2x-4}{3} = 3 - \frac{4+x}{2} \rightarrow 6\left(\frac{2x-4}{3}\right) = 6\left(3 - \frac{4+x}{2}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow 2(2x-4) = 18 - 3(4+x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x-8 = 18-12-3x \rightarrow 7x = 14 \rightarrow x = 2$$

9 ■■■ Resuelve y comprueba la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = -\frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5}$

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

c) $\frac{x+5}{5} - \frac{x+5}{24} = \frac{x+6}{10} + \frac{x+4}{60}$

a) $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = -\frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5} \rightarrow 60\left(\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3}\right) = 60\left(-\frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5}\right)$

$$30(x+2) - 20(x+3) = -15(x-4) + 12(x-5) \rightarrow$$

$$\rightarrow 30x+60-20x-60 = -15x+60+12x-60 \rightarrow 37x=0 \rightarrow x=0$$

Comprobación: $\frac{0+2}{2} - \frac{0+3}{3} = -\frac{0-4}{4} + \frac{-5}{5} \rightarrow 1-1 = 1-1 \rightarrow 0=0$

$$b) \frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4} \rightarrow 40\left(\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8}\right) = 40\left(\frac{x+1}{4}\right)$$

$$8(3x+2) - 4(4x-1) + 5(5x-2) = 10(x+1) \rightarrow$$

$$\rightarrow 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10 \rightarrow 23x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Comprobación: } \frac{2}{5} - \frac{-1}{10} + \frac{-2}{8} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$c) \frac{x+5}{5} - \frac{x+5}{24} = \frac{x+6}{10} + \frac{x+4}{60} \rightarrow 120\left(\frac{x+5}{5} - \frac{x+5}{24}\right) = 120\left(\frac{x+6}{10} + \frac{x+4}{60}\right)$$

$$24(x+5) - 5(x+5) = 12(x+6) + 2(x+4) \rightarrow$$

$$\rightarrow 24x + 120 - 5x - 25 = 12x + 72 + 2x + 8 \rightarrow 5x = -15 \rightarrow x = -3$$

$$\text{Comprobación: } \frac{-3+5}{5} - \frac{-3+5}{24} = \frac{2}{5} - \frac{1}{12} = \frac{19}{60}$$

$$\frac{-3+6}{10} + \frac{-3+4}{60} = \frac{3}{10} + \frac{1}{60} = \frac{19}{60}$$

10 ■■■ Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla sus soluciones:

$$a) (4x-3)(4x+3) - 4(3-2x)^2 = 3x$$

$$b) 2x(x+3) + (3-x)^2 = 3x(x+1)$$

$$c) (2x-3)^2 + (x-2)^2 = 3(x+1) + 5x(x-1)$$

$$d) \frac{x(x+1)}{2} - \frac{(2x-1)^2}{8} = \frac{3x+1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$a) (4x-3)(4x+3) - 4(3-2x)^2 = 3x \rightarrow$$

$$\rightarrow 16x^2 - 9 - 4(9 + 4x^2 - 12x) = 3x \rightarrow$$

$$\rightarrow 16x^2 - 9 - 36 - 16x^2 + 48x = 3x \rightarrow 45x = 45 \rightarrow x = 1$$

$$b) 2x(x+3) + (3-x)^2 = 3x(x+1) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 6x + 9 + x^2 - 6x = 3x^2 + 3x \rightarrow 9 = 3x \rightarrow x = 3$$

$$c) (2x-3)^2 + (x-2)^2 = 3(x+1) + 5x(x-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2 + 9 - 12x + x^2 + 4 - 4x = 3x + 3 + 5x^2 - 5x \rightarrow$$

$$\rightarrow 13 - 16x = -2x + 3 \rightarrow 10 = 14x \rightarrow x = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$d) \frac{x(x+1)}{2} - \frac{(2x-1)^2}{8} = \frac{3x+1}{4} - \frac{1}{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow 8\left(\frac{x(x+1)}{2} - \frac{(2x-1)^2}{8}\right) = 8\left(\frac{3x+1}{4} - \frac{1}{8}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x(x+1) - (2x-1)^2 = 2(3x+1) - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2 - 4x - (4x^2 + 1 - 4x) = 6x + 2 - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow -1 = 6x + 1 \rightarrow -2 = 6x \rightarrow x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

PÁGINA 115

Ecuaciones de segundo grado

11 ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula de resolución:

a) $3x^2 - 12x = 0$

b) $x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 - 5x = 0$

d) $2x^2 - 8 = 0$

e) $9x^2 - 25 = 0$

f) $4x^2 + 100 = 0$

g) $16x^2 = 100$

h) $3x^2 - 6 = 0$

$$a) 3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$b) x - 3x^2 = 0 \rightarrow x(1 - 3x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1/3 \end{cases}$$

$$c) 2x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(2x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 5/2 \end{cases}$$

$$d) 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$e) 9x^2 - 25 = 0 \rightarrow 9x^2 = 25 \rightarrow x^2 = \frac{25}{9} \begin{cases} x = 5/3 \\ x = -5/3 \end{cases}$$

$$f) 4x^2 + 100 = 0 \rightarrow 4x^2 = -100 \text{ No tiene solución.}$$

$$g) 16x^2 = 100 \rightarrow x^2 = \frac{100}{16} \begin{cases} x = 10/4 = 5/2 \\ x = -10/4 = -5/2 \end{cases}$$

$$h) 3x^2 - 6 = 0 \rightarrow 3x^2 = 6 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

12 ■■■ Resuelve.

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 9x + 20 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

d) $x^2 + x + 3 = 0$

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0$

f) $x^2 - 2x + 3 = 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

$$a) x^2 + 4x - 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 21 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -7 \end{cases}$$

$$b) x^2 + 9x + 20 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{-9 \pm 1}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$c) 9x^2 - 12x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} = \frac{12 \pm 0}{18} = \frac{2}{3}$$

$$d) x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3}}{2} \text{ No tiene solución.}$$

$$e) 4x^2 + 28x + 49 = 0 \rightarrow x = \frac{-28 \pm \sqrt{784 - 4 \cdot 4 \cdot 49}}{8} = \frac{-28 \pm 0}{8} = -\frac{7}{2}$$

$$f) x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2} \text{ No tiene solución.}$$

$$g) 4x^2 - 20x + 25 = 0 \rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{8} = \frac{20 \pm 0}{8} = \frac{5}{2}$$

$$h) -2x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-2) \cdot 2}}{-4} = \frac{-3 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = -2/4 = -1/2 \\ x = 2 \end{cases}$$

13 ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x + 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1) - 8$

b) $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0$

c) $(2x + 1)^2 = 4 + (x + 2)(x - 2)$

d) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

a) $(2x + 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1) - 8 \rightarrow$

$$\rightarrow 2x^2 - 6x + x - 3 = x^2 - 1 - 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} \rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

b) $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 4x^2 - 9 - x^2 - x - 5 = 0 \rightarrow 3x^2 - x - 14 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-14)}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{1 \pm 13}{6} \begin{cases} x = 7/3 \\ x = -2 \end{cases}$$

c) $(2x + 1)^2 = 4 + (x + 2)(x - 2) \rightarrow$

$$\rightarrow 4x^2 + 1 + 4x = 4 + x^2 - 4 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} \begin{cases} x = -1/3 \\ x = -1 \end{cases}$$

d) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 + 16 + 8x - (4x^2 + 1 - 4x) - 8x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 16 + 8x - 4x^2 - 1 + 4x - 8x = 0 \rightarrow -3x^2 + 4x + 15 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-3) \cdot 15}}{-6} = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{-6} = \frac{-4 \pm 14}{-6} \begin{cases} x = -5/3 \\ x = 3 \end{cases}$$

14 ■■■ Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$a) \frac{(5x-4)(5x+4)}{4} = \frac{(3x-1)^2 - 9}{2}$$

$$b) \frac{x}{3}(x-1) - \frac{x}{4}(x+1) + \frac{3x+4}{12} = 0$$

$$c) \frac{(x-1)(x+2)}{12} - \frac{(x+1)(x-2)}{6} - 1 = \frac{x-3}{3}$$

$$d) \frac{(x-1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x+1}{5} = 0$$

$$e) \frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$a) \frac{(5x-4)(5x+4)}{4} = \frac{(3x-1)^2 - 9}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{25x^2 - 16}{4} = \frac{2(9x^2 + 1 - 6x - 9)}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 - 16 = 18x^2 + 2 - 12x - 18 \rightarrow 7x^2 + 12x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x(7x + 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -12/7 \end{cases}$$

$$b) \frac{x}{3}(x-1) - \frac{x}{4}(x+1) + \frac{3x+4}{12} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 12 \left(\frac{x}{3}(x-1) - \frac{x}{4}(x+1) + \frac{3x+4}{12} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x(x-1) - 3x(x+1) + 3x+4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = 2$$

$$c) \frac{(x-1)(x+2)}{12} - \frac{(x+1)(x-2)}{6} - 1 = \frac{x-3}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2 + x - 2}{12} - \frac{x^2 - x - 2}{6} - 1 = \frac{x-3}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 12 \left(\frac{x^2 + x - 2}{12} - \frac{x^2 - x - 2}{6} - 1 \right) = 12 \left(\frac{x-3}{3} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + x - 2 - 2(x^2 - x - 2) - 12 = 4(x-3) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + x - 2 - 2x^2 + 2x + 4 - 12 = 4x - 12 \rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \frac{(x-1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x+1}{5} = 0 \rightarrow \\
 & \rightarrow 15 \left[\frac{(x-1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x+1}{5} \right] = 0 \rightarrow \\
 & \rightarrow x^2 - 2x + 1 - 3x + 1 + 3x + 3 = 0 \rightarrow \\
 & \rightarrow x^2 - 2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \\
 \\
 \text{e) } & \frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6} \rightarrow \\
 & \rightarrow 12 \left(\frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} \right) = 12 \cdot \frac{1}{6} \rightarrow \\
 & \rightarrow 6(x+1) - 3(x^2 - 2x + 1) - 4(x+2) + 2(x^2 - 4x + 4) = 2 \rightarrow \\
 & \rightarrow 6x + 6 - 3x^2 + 6x - 3 - 4x - 8 + 2x^2 - 8x + 8 = 2 \rightarrow \\
 & \rightarrow -x^2 + 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

PIENSA Y RESUELVE

15 ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0,5 [1 - (x + 2)^2] = -x - 0,5 (x^2 - 1)$

b) $0,3x^2 + 2,4x - 6 = 0$

c) $(x - 3,2)(x - 1,5) = 0$

d) $4(x + 11)^2 - 100 = 0$

a) $0,5 [1 - (x + 2)^2] = -x - 0,5 (x^2 - 1) \rightarrow$

$\rightarrow 0,5(1 - x^2 - 4 - 4x) = -x - 0,5x^2 + 0,5 \rightarrow$

$\rightarrow 0,5 - 0,5x^2 - 2 - 2x = -x - 0,5x^2 + 0,5 \rightarrow -2 = x$

b) $0,3x^2 + 2,4x - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{-2,4 \pm \sqrt{5,76 - 4(0,3)(-6)}}{0,6} = \frac{-2,4 \pm 3,6}{0,6} \begin{cases} x = 2 \\ x = -10 \end{cases}$

c) $(x - 3,2)(x - 1,5) = 0 \begin{cases} x - 3,2 = 0 \rightarrow x = 3,2 \\ x - 1,5 = 0 \rightarrow x = 1,5 \end{cases}$

d) $4(x + 11)^2 - 100 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4(x^2 + 121 + 22x) - 100 = 0 \rightarrow 4x^2 + 484 + 88x - 100 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 + 88x + 384 = 0 \rightarrow x^2 + 22x + 96 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{-22 \pm \sqrt{484 - 4 \cdot 96}}{2} = \frac{-22 \pm 10}{2} \begin{cases} x = -6 \\ x = -16 \end{cases}$

16 ■■■ Algunas de las siguientes “ecuaciones” no tienen solución y otras tienen infinitas soluciones. Resuélvelas y compruébalo (recuerda que, en realidad, estas igualdades no son ecuaciones, ya que no tienen término en x).

a) $4(2x + 1) - 3(x + 3) = 5(x - 2)$ b) $2(x - 3) + 1 = 3(x - 1) - (2 + x)$

c) $\frac{3x + 1}{2} = 2x - \frac{x - 1}{2}$ d) $x + \frac{2x - 7}{4} = 2x + \frac{1 - x}{2}$

a) $4(2x + 1) - 3(x + 3) = 5(x - 2) \rightarrow$
 $\rightarrow 8x + 4 - 3x - 9 = 5x - 10 \rightarrow 0x = -5 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $2(x - 3) + 1 = 3(x - 1) - (2 + x) \rightarrow$
 $\rightarrow 2x - 6 + 1 = 3x - 3 - 2 - x \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $\frac{3x + 1}{2} = 2x - \frac{x - 1}{2} \rightarrow 2\left(\frac{3x + 1}{2}\right) = 2\left(2x - \frac{x - 1}{2}\right) \rightarrow$
 $\rightarrow 3x + 1 = 4x - x + 1 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$
 \rightarrow Tiene infinitas soluciones.

d) $\frac{x + 1}{2} = x - \frac{2x + 3}{4} \rightarrow 4\left(\frac{x + 1}{2}\right) = 4\left(x - \frac{2x + 3}{4}\right) \rightarrow$
 $\rightarrow 2x + 2 = 4x - 2x - 3 \rightarrow 0x = -5 \rightarrow$ No tiene solución.

e) $x + \frac{2x - 7}{4} = 2x + \frac{1 - x}{2} \rightarrow 4\left(x + \frac{2x - 7}{4}\right) = 4\left(2x + \frac{1 - x}{2}\right) \rightarrow$
 $\rightarrow 4x + 2x - 7 = 8x + 2 - 2x \rightarrow 0x = 9 \rightarrow$ No tiene solución.

17 ■■■ La suma de tres números naturales consecutivos es igual al quintuple del menor menos 11. ¿Cuáles son esos números?

Llamemos x , $x + 1$, $x + 2$ a los números. Así:

$$x + x + 1 + x + 2 = 5x - 11 \rightarrow 14 = 2x \rightarrow x = 7$$

Los números son 7, 8 y 9.

18 ■■■ Calcula un número tal que sumándole su mitad se obtiene lo mismo que restando 6 a los $\frac{9}{5}$ de ese número.

$$x + \frac{x}{2} = \frac{9}{5}x - 6 \rightarrow 10\left(x + \frac{x}{2}\right) = 10\left(\frac{9}{5}x - 6\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x + 5x = 18x - 60 \rightarrow 60 = 3x \rightarrow x = 20$$

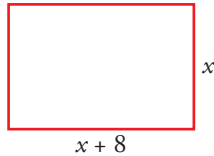
El número es 20.

19 ■■■ Halla tres números impares consecutivos tales que su suma sea 117. (Un número impar es $2x + 1$).

$$2x + 1 + 2x + 3 + 2x + 5 = 117 \rightarrow 6x = 108 \rightarrow x = 18$$

Los números son 37, 39 y 41.

- 20** ■■■ Calcula las longitudes de los lados de un rectángulo de perímetro 82 cm y cuya base mide 8 cm más que la altura.



$$2(x + x + 8) = 82 \rightarrow 2x + 8 = 41 \rightarrow \\ \rightarrow 2x = 33 \rightarrow x = 16,5$$

La base mide 24,5 cm, y la altura, 16,5 cm.

- 21** ■■■ He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?

Precio del bolígrafo, x ; cuaderno, $2x$; carpeta, $5 \cdot 2x$.

$$x + 2x + 10x = 14,30 \rightarrow 13x = 14,30 \rightarrow x = 1,1$$

El bolígrafo cuesta 1,1 €; el cuaderno, 2,2 €, y la carpeta, 11 €.

- 22** ■■■ El precio de unos zapatos ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?

$$x \cdot 1,15 \cdot 0,8 = x - 6,96 \rightarrow 0,92x = x - 6,96 \rightarrow \\ \rightarrow 6,96 = 0,08x \rightarrow x = 87 \text{ €}$$

El precio inicial era 87 €.

- 23** ■■■ Luis y Miguel han comprado dos videojuegos que tenían el mismo precio, pero han conseguido una rebaja del 16% y del 19%, respectivamente. Si Luis pagó 1,26 € más que Miguel, ¿cuál era el precio que tenía el videojuego?

Luis pagó $0,84x$ y Miguel pagó $0,81x$.

$$0,84x = 0,81x + 1,26 \rightarrow 0,03x = 1,26 \rightarrow x = 42$$

El precio del videojuego era 42 €.

PÁGINA 116

- 24** ■■■ Calcula el capital que colocado al 6% de interés compuesto durante dos años se ha convertido en 3 293 €.

x es el capital inicial.

$$x \cdot 1,06^2 = 3\,293 \rightarrow x = \frac{3\,293}{1,06^2} \approx 2\,930,76 \text{ €}$$

El capital inicial era 2 930,76 €.

- 25** ■■■ Si un número aumenta un 30%, resulta 189 unidades mayor que si disminuye un 15%. ¿Cuál es ese número?

x es el número.

$$1,3x - 189 = 0,85x \rightarrow 0,45x = 189 \rightarrow x = 420$$

420 es el número buscado.

- 26** ■■■ Con 3,5 € más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25 €. ¿Cuánto dinero tengo?

x es el dinero que tengo.

$$x + 3,5 = 2x - 7,25 \rightarrow 3,5 + 7,25 = x \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 10,75 \text{ € es el dinero que tengo.}$$

- 27** ■■■ Tres amigos trabajan 20, 30 y 50 días en un negocio. Al cabo de tres meses, se reparten los beneficios correspondiendo al tercero 300 € más que al segundo. ¿Cuál fue la cantidad repartida?

☞ Si x son los beneficios, al primero le corresponde $\frac{x}{100} \cdot 20$.

x son los beneficios.

$$20 + 30 + 50 = 100 \text{ días de trabajo.}$$

Las partes que corresponden a cada uno son:

$$\frac{x}{100} \cdot 20; \frac{x}{100} \cdot 30 \text{ y } \frac{x}{100} \cdot 50$$

$$\frac{x}{100} \cdot 30 + 300 = \frac{x}{100} \cdot 50 \rightarrow \frac{3x}{10} + 300 = \frac{5x}{10} \rightarrow 300 = \frac{2x}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1500 \text{ € es la cantidad repartida.}$$

- 29** ■■■ Del dinero de una cuenta bancaria retiramos $\frac{1}{7}$; ingresamos después $\frac{2}{15}$ de lo que quedó y aún faltan 12 € para tener la cantidad inicial. ¿Cuánto dinero había en la cuenta?

x es el dinero de la cuenta.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Retiramos } \frac{1}{7}x \rightarrow \text{quedan } \frac{6}{7}x \\ \text{Ingresamos } \frac{2}{15} \cdot \frac{6}{7}x = \frac{4}{35}x \end{array} \right\} \frac{6}{7}x + \frac{4}{35}x + 12 = x \rightarrow \frac{34}{35}x + 12 = x \rightarrow$$

$$\rightarrow 12 = \frac{1}{35}x \rightarrow x = 420 \text{ € había en la cuenta.}$$

- 30** ■■■ De un depósito de agua se sacan un $\frac{2}{7}$ de su contenido; después, 40 litros, y por último, $\frac{5}{11}$ del agua restante, quedando aún 60 l. ¿Cuánta agua había en el depósito?

x son los litros que hay en el depósito.

$$\text{Sacamos } \frac{2}{7}x \rightarrow \text{quedan } \frac{5}{7}x \quad \text{Sacamos } 40 \text{ l} \rightarrow \text{quedan } \frac{5}{7}x - 40$$

$$\text{Sacamos } \frac{5}{11}\left(\frac{5}{7}x - 40\right) \rightarrow \text{quedan } \frac{6}{11}\left(\frac{5}{7}x - 40\right)$$

$$\text{Quedan } \frac{30}{77}x - \frac{240}{11} = 60 \rightarrow 30x - 1680 = 4620 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 210 \text{ litros de agua había en el depósito.}$$

- 32** ■■■ Un padre de 43 años tiene dos hijos de 9 y 11 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

x son los años que tienen que pasar.

$$(9 + x) + (11 + x) = 43 + x \rightarrow 20 + 2x = 43 + x \rightarrow x = 23$$

Han de transcurrir 23 años.

- 33** ■■■ La edad actual de un padre es el triple que la de su hijo y dentro de 14 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

x es la edad del hijo $\rightarrow 3x$ es la edad del padre.

Dentro de 14 años la edad del hijo será $x + 14$, y la del padre, $3x + 14$.

$$(x + 14)2 = 3x + 14 \rightarrow 2x + 28 = 3x + 14 \rightarrow x = 14$$

El hijo tiene 14 años, y el padre, 42 años.

- 34** ■■■ Calcula cuántos litros de aceite de orujo de 1,6 €/l tenemos que añadir a un bidón que contiene 60 l de aceite de oliva de 2,8 €/l para obtener una mezcla de 2,5 €/l.

👁 Mira el problema resuelto 2 de la página 113.

x son los litros de aceite de orujo.

	<u>CANTIDAD</u>	<u>PRECIO</u>	<u>COSTE</u>	
ORUJO	x	1,6	$1,6x$	}
OLIVA	60	2,8	$2,8 \cdot 60$	
MEZCLA	$x + 60$	2,5	$2,5(x + 60)$	
				$1,6x + 168 = 2,5x + 150 \rightarrow$ $\rightarrow 18 = 0,9x \rightarrow x = 20 \text{ l}$

Tenemos que añadir 20 litros.

- 35** ■■■ Al mezclar 30 kg de pintura con 50 kg de otra de calidad inferior, obtenemos una mezcla a 3,30 €/kg. Si el precio de la pintura barata es la mitad que el de la otra, ¿cuál es el precio del kilo de cada clase de pintura?

	<u>CANTIDAD</u>	<u>PRECIO</u>	<u>COSTE</u>	
PINTURA I	30	$2x$	$60x$	}
PINTURA II	50	x	$50x$	
MEZCLA	80	3,30	$80 \cdot 3,3$	
				$60x + 50x = 264 \rightarrow$ $\rightarrow 110x = 264 \rightarrow$ $\rightarrow x = 2,4 \text{ €/kg}$

La pintura cara vale 4,8 €/kg, y la pintura barata, 2,4 €/kg.

- 36** ■■■ Una marca de café se elabora con un 30% de café colombiano de 18 €/kg, y el resto, con otro tipo de café. La mezcla resulta a 14,15 €/kg. ¿Cuál es el precio del café más barato?

Para obtener 1 kg de mezcla, ponemos 0,3 kg de café colombiano y 0,7 kg del otro café.

$$0,3 \cdot 18 + 0,7x = 1 \cdot 14,15 \rightarrow 0,7x = 8,75 \rightarrow x = 12,5 \text{ €/kg}$$

El precio del café barato es 12,5 €/kg.

- 37** ■■■ Un centro escolar contrató un autobús para una salida al campo. Con todas las plazas ocupadas, el precio del billete es 12 €; pero quedaron 4 plazas libres por lo que el viaje costó 13,5 €. ¿Cuántas plazas tiene el autobús?

☞ Con x plazas a 12 € se obtiene lo mismo que con $x - 4$ plazas a 13,5 €.

x es el número total de plazas.

$$x \cdot 12 = (x - 4) \cdot 13,5 \rightarrow 12x = 13,5x - 54 \rightarrow 54 = 1,5x \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 36 \text{ es el número de plazas que tiene el autobús.}$$

PÁGINA 117

- 39** ■■■ Un ciclista que va a 21 km/h tarda tres cuartos de hora en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 2,25 km. ¿Qué velocidad lleva el que va delante?

☞ La velocidad con la que se acercan es la diferencia de las velocidades absolutas.

x es la velocidad del que va delante.

La velocidad con que se acercan es $21 - x$.

Con esa velocidad, deben recorrer 2,25 km en 0,75 h.

$$2,25 = (21 - x) \cdot 0,75 \rightarrow \frac{2,25}{0,75} = 21 - x \rightarrow 3 = 21 - x \rightarrow x = 18 \text{ km/h}$$

- 40** ■■■ La distancia entre dos ciudades, A y B , es 280 km. Un tren sale de A a 80 km/h, y media hora más tarde sale un coche de B hacia A que tarda 1,2 horas en cruzarse con el tren. ¿Qué velocidad lleva el coche?

☞ Ten en cuenta que el tren ha recorrido 40 km cuando sale el coche.

El tren ha recorrido $80 \cdot 0,5 = 40$ km antes de que salga el coche. La distancia que hay entre los dos es ahora 240 km.

Si x es la velocidad del coche, se acercan a $(80 + x)$ km/h.

$$(80 + x)1,2 = 240 \rightarrow 80 + x = \frac{240}{1,2} \rightarrow 80 + x = 200 \rightarrow x = 120 \text{ km/h}$$

- 41** ■■■ Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos 130. ¿Cuál es el número?

x es el número buscado.

$$x^2 - 3x = 130 \rightarrow x^2 - 3x - 130 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 130}}{2} = \frac{3 \pm 23}{2} \begin{cases} x = 13 \\ x = -10 \end{cases}$$

El número puede ser 13 o -10 . Hay dos soluciones.

- 42** ■■■ Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.

Los números son x y $x + 1$.

$$x^2 + (x + 1)^2 = 145 \rightarrow x^2 + x^2 + 1 + 2x - 145 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x - 144 = 0 \rightarrow x^2 + x - 72 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 72 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 8 \\ x = -9 \end{cases}$$

Son 8 y 9, o bien, -9 y -8 . Hay dos soluciones.

- 43** ■■■ Si al producto de un número natural por su siguiente le restamos 31, obtenemos el quintuplo de la suma de ambos. ¿De qué número se trata?

x es el número que buscamos.

$$x(x + 1) - 31 = 5(x + x + 1) \rightarrow x^2 + x - 31 = 10x + 5 \rightarrow$$

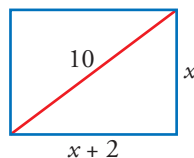
$$\rightarrow x^2 - 9x - 36 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{9 \pm 15}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -3 \end{cases}$$

El número puede ser 12, o bien, -3 . Hay dos soluciones.

- 44** ■■■ Calcula los lados de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm y en el que la base mide 2 cm más que la altura.

👁 Mira el problema resuelto 1 de la página 113.



$$x^2 + (x + 2)^2 = 10^2 \rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-48)}}{2} = \frac{-2 \pm 14}{2} \begin{cases} x = 6 \\ x = -8. \text{ No vale.} \end{cases}$$

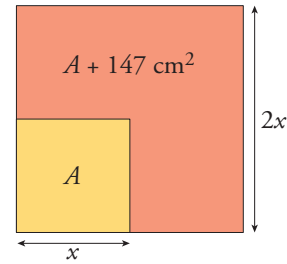
La altura mide 6 cm, y la base, 8 cm.

- 45** ■■■ Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en 147 cm^2 . ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área del mayor: } (2x)^2 \\ \text{Área del menor: } x^2 \end{array} \right\} 4x^2 - x^2 = 147 \rightarrow$$

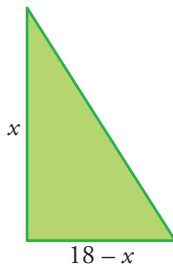
$$\rightarrow 3x^2 = 147 \rightarrow x^2 = 49 \begin{cases} x = 7 \\ x = -7. \text{ No vale.} \end{cases}$$

El lado del cuadrado mide 7 cm.



- 46** ■■■ Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es 40 cm^2 . Halla los catetos de este triángulo.

👁 Si un cateto mide $x \text{ cm}$, el otro medirá $(18 - x) \text{ cm}$.



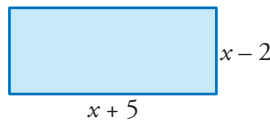
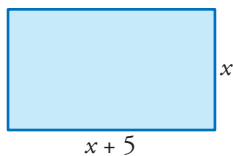
$$\text{Área: } \frac{x(18-x)}{2} = 40 \rightarrow 18x - x^2 = 80 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 18x + 80 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 80}}{2} = \frac{18 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 11 \\ x = 7 \end{cases}$$

Los catetos miden 7 cm y 11 cm, respectivamente.

- 47** ■■■ La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será 60 cm^2 . Halla los lados del rectángulo.



$$(x + 5)(x - 2) = 60 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 3x - 10 = 60 \rightarrow$$

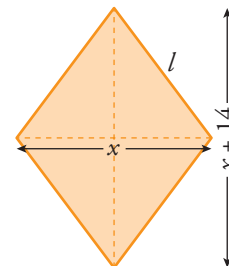
$$\rightarrow x^2 - 3x - 70 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-70)}}{2} = \frac{3 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 10 \\ x = -7 \text{ No vale.} \end{cases}$$

La altura mide 7 cm, y la base, 12 cm.

- 48** ■■■ El perímetro de un rombo es 140 cm y sus diagonales se diferencian en 14 cm. Halla la medida de sus diagonales.

👁 Si una diagonal mide x , la otra medirá $x + 14$. El lado con la mitad de cada diagonal forma un triángulo rectángulo.



El lado del rombo mide $\frac{140}{4} = 35 \text{ cm}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+14}{2}\right)^2 &= 35^2 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{x^2 + 28x + 196}{4} = 1\,225 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{2x^2 + 28x + 196}{4} &= 1\,225 \rightarrow 2x^2 + 28x + 196 = 4\,900 \rightarrow \\ \rightarrow 2x^2 + 28x - 4\,704 &= 0 \rightarrow x^2 + 14x - 2\,352 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow x &= \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 4(-2\,352)}}{2} = \frac{-14 \pm 98}{2} \begin{cases} x = 42 \\ x = -56 \end{cases} \text{ No vale.} \end{aligned}$$

La diagonal menor mide 42 cm, y la mayor, 56 cm.

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

49 Si al resolver una ecuación de primer grado llegamos a $0 \cdot x = 3$, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación? ¿Y si llegamos a $0 \cdot x = 0$?

$0 \cdot x = 3$ La ecuación no tiene solución, porque ningún número multiplicado por 0 puede ser igual a 3.

$0 \cdot x = 0$ La ecuación tiene infinitas soluciones, porque cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0.

50 Justifica cuántas soluciones tiene cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $3(5 - x) + 2x = 8 - (1 + x)$

b) $x - 1 + \frac{3 - x}{3} = \frac{2}{3}x$

c) $8 - 2(2 - x) = 4\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

a) $3(5 - x) + 2x = 8 - (1 + x) \rightarrow 15 - 3x + 2x = 8 - 1 - x \rightarrow 0x = -8$

No tiene solución, porque no hay ningún número que multiplicado por 0 sea igual a -8 .

b) $x - 1 + \frac{3 - x}{3} = \frac{2}{3}x \rightarrow 3x - 3 + 3 - x = 2x \rightarrow 0x = 0$

Tiene infinitas soluciones, porque cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0.

c) $8 - 4 + 2x = 4 - 2x \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$

Tiene una solución.

PÁGINA 118

51 Si el discriminante de una ecuación de segundo grado es $\Delta = 5$, ¿qué podemos decir del número de soluciones de la ecuación? ¿Y si $\Delta = 0$?

Si $\Delta = 5$, el número de soluciones es 2.

Si $\Delta = 0$, el número de soluciones es 1.

53 ■■■ Resuelve como en el ejercicio anterior:

a) $(x + 3)(x - 2) = 0$

b) $x(5x - 2) = 0$

c) $(x - 4)^2 = 0$

d) $5(2x - 3)^2 = 0$

a) $(x + 3)(x - 2) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $x(5x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/5 \end{cases}$

c) $(x - 4)^2 = 0 \rightarrow x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

d) $5(2x - 3)^2 = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

55 ■■■ Inventa ecuaciones de segundo grado con:

a) Dos soluciones: $x = -2$ y $x = 3$

b) Dos soluciones: $x = 3$ y $x = -\frac{2}{3}$

c) Dos soluciones: $x = 0$ y $x = -5$

d) Una solución: $x = 4$

e) Ninguna solución.

a) $(x + 2)(x - 3) = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

b) $(x - 3)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0 \rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$

c) $x(x + 5) = 0 \rightarrow x^2 + 5x = 0$

d) $(x - 4)^2 = 0$

e) $x^2 + 100 = 0$

56 ■■■ En la ecuación $x^2 - 14x + m = 0$:

a) ¿Qué valor debe tomar m para que tenga dos soluciones iguales?

b) ¿Y para que sean distintas?

c) ¿Y para que no tenga solución?

a) $x^2 - 14x + m = 0$

$$\Delta = 14^2 - 4 \cdot m = 0 \rightarrow 196 - 4m = 0 \rightarrow m = 49$$

b) Para que sean distintas, $m \neq 49$ y $m < 49$.

c) Para que no tenga solución, $196 - 4m < 0 \rightarrow 196 < 4m \rightarrow m > 49$.

57 ■■■ ¿Cuál debe ser el valor de a para que $x = 2$ sea solución de la ecuación $(x - 3)^2 - x^3 + a = 0$? Justifica tu respuesta.

$$(x - 3)^2 - x^3 + a = 0 \rightarrow (2 - 3)^2 - 2^3 + a = 0 \rightarrow 1 - 8 + a = 0 \rightarrow a = 7$$

58 ■■■ ¿Son equivalentes las ecuaciones $x^2 - 2x = 0$ y $2x - 4 = 0$? Justifica tu respuesta.

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

No son equivalentes, porque no tienen las mismas soluciones.

- 59** La ecuación $x^2 + bx + 4 = 0$ ¿puede tener por soluciones 2 y 3? Razona tu respuesta.

$$x^2 + bx + 4 = 0$$

$$2^2 + 2b + 4 = 0 \rightarrow b = -4$$

$$3^2 + 3b + 4 = 0 \rightarrow b = -\frac{13}{3}$$

No, porque para que 2 sea solución tiene que ser $b = -4$, y para que 3 sea solución, $b = -\frac{13}{3}$. Solo sería posible si obtuviéramos el mismo valor para b en ambos casos.

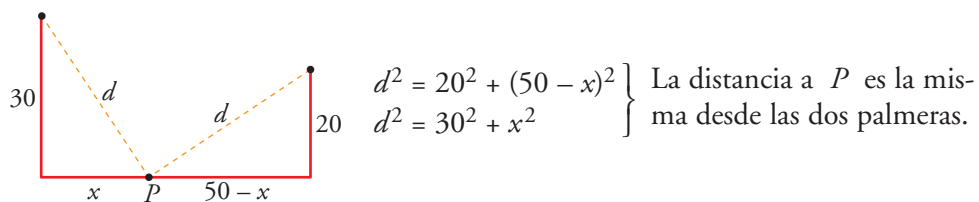
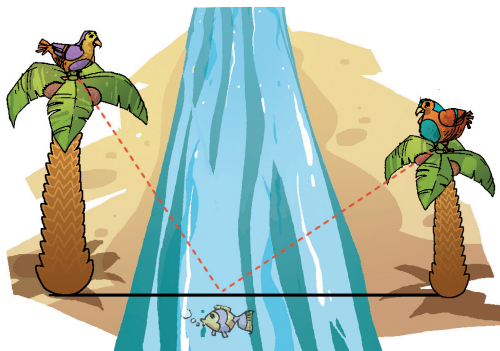
PROFUNDIZA

- 60** Expresa en función de m la solución de la ecuación $mx - m = x + 3m$.
¿Para qué valor de m la ecuación no tiene solución?

$$mx - m = x + 3m \rightarrow mx - x = 3m + m \rightarrow x(m - 1) = 3m \rightarrow x = \frac{3m}{m - 1}$$

La ecuación no tiene solución si $m = 1$.

- 61** En las dos orillas de un río hay dos palmeras. La más alta mide 30 codos; la otra, 20 codos, y la distancia entre ambas es de 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Al descubrir los dos pájaros un pez en la superficie del río, se lanzan rápidamente, alcanzando al pez al mismo tiempo.
¿A qué distancia del tronco de la palmera más alta apareció el pez?



$$\begin{aligned} 20^2 + (50 - x)^2 &= 30^2 + x^2 \rightarrow 400 + 2500 - 100x + x^2 = 900 + x^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 2000 = 100x \rightarrow x = 20 \text{ m} \end{aligned}$$

A 20 m de la palmera más alta.

- 62** ■■■ Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir el orden de estas, el resultado es 18. Averigua cuál es el número sabiendo que la cifra de las unidades es 2.

x es la cifra de las decenas. El número es $10x + 2$.

$$(10x + 2) - (20 + x) = 18 \rightarrow 9x - 18 = 18 \rightarrow 9x = 36 \rightarrow x = 4$$

El número buscado es 42.

- 63** ■■■ Para saldar una deuda, un banco me ofrece dos opciones. Pagarla dentro de 2 años con un 8% de interés anual o pagarla dentro de 9 meses al 15% de interés anual. Con la segunda opción pago 577,3 € menos que con la primera. Calcula el dinero que debo.

x es el dinero que debo; 15% anual $\approx \frac{15}{12} = 1,25$ mensual

Con la 1.ª opción pago $x \cdot 1,08^2$.

Con la 2.ª opción pago $x(1,0125)^9$.

$$x \cdot 1,08^2 - x(1,0125)^9 = 577,3 \rightarrow 0,048x = 577,3$$

$x = 12\,000$ € es el dinero que debo.

64 ■■■ Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Es una ecuación bicuadrada.

Hacemos el cambio $x^2 = y$.

Sustituimos en la ecuación y resolvemos:

$$y^2 - 13y + 36 = 0 \begin{cases} y = 9 \rightarrow x^2 = 9 \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases} \\ y = 4 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases} \end{cases}$$

Comprueba las cuatro soluciones de la ecuación.

Las soluciones son $x = 3$; $x = -3$; $x = 2$ y $x = -2$.

PÁGINA 119

- 65** ■■■ Resuelve como en el ejercicio anterior las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

b) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

c) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

d) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

$$\text{a) } x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \quad \begin{matrix} x^2 = y \\ \rightarrow \end{matrix} \quad y^2 - 17y + 16 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} \begin{cases} y = 16 & \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \\ y = 1 & \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{b) } 4x^4 - 17x^2 + 4 = 0 \quad \begin{matrix} x^2 = y \\ \rightarrow \end{matrix} \quad 4y^2 - 17y + 4 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} \begin{cases} y = 2 & \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \\ y = 1/4 & \begin{cases} x = 1/2 \\ x = -1/2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{c) } x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \quad \begin{matrix} x^2 = y \\ \rightarrow \end{matrix} \quad y^2 - 8y - 9 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 9}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 9 & \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \\ y = -1 & \text{No vale} \end{cases}$$

$$\text{d) } 36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \quad \begin{matrix} x^2 = y \\ \rightarrow \end{matrix} \quad 36y^2 - 13y + 1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{72} = \frac{13 \pm 5}{72} \begin{cases} y = 1/4 & \begin{cases} x = 1/2 \\ x = -1/2 \end{cases} \\ y = 1/9 & \begin{cases} x = 1/3 \\ x = -1/3 \end{cases} \end{cases}$$

66 ■ ■ ■ Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{12}$.

- Multiplicamos los dos miembros por $12x(x+1)$, que es el mín.c.m. de los denominadores.

$$12(x+1) - 12x = x(x+1) \quad \rightarrow \quad x^2 + x - 12 = 0$$

- Resuelve esta ecuación y comprueba las soluciones en la ecuación dada.

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = 3: \frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} \quad \rightarrow \quad x = 3 \text{ es solución.}$$

$$x = -4: \frac{1}{-4} - \frac{1}{(-4)+1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} = \frac{1}{12} \quad \rightarrow \quad x = -4 \text{ es solución}$$

67 ■■■ Resuelve como en el ejercicio anterior:

$$\text{a) } \frac{1}{x} - 3x = \frac{x-3}{2x}$$

$$\text{b) } \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{c) } \frac{15}{x} = \frac{-72-6x^2}{2x^2} + 2$$

$$\text{d) } \frac{x+1}{x-1} - 3 = \frac{2-x}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{x} - 3x &= \frac{x-3}{2x} \rightarrow 2x\left(\frac{1}{x} - 3x\right) = 2x\left(\frac{x-3}{2x}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow 2 - 6x^2 = x - 3 \rightarrow 6x^2 + x - 5 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6 \cdot 5}}{12} = \frac{-1 \pm 11}{12} \begin{cases} x = 5/6 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} &= 0 \rightarrow x(x-1) - (x+1)(x+1) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 - x - (x^2 + 2x + 1) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 - x - x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow -3x - 1 = 0 \rightarrow -3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{15}{x} = \frac{-72-6x^2}{2x^2} + 2 &\rightarrow 2x^2\left(\frac{15}{x}\right) = 2x^2\left(\frac{-72-6x^2}{2x^2} + 2\right) \rightarrow \\ &\rightarrow 30x = -72 - 6x^2 + 4x^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 2x^2 + 30x + 72 = 0 \rightarrow x^2 + 15x + 36 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{-15 \pm 9}{2} \begin{cases} x = -12 \\ x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x+1}{x-1} - 3 &= \frac{2-x}{x} \rightarrow x(x-1)\left(\frac{x+1}{x-1} - 3\right) = x(x-1)\left(\frac{2-x}{x}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow x(x+1) - 3x(x-1) = (x-1)(2-x) \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + x - 3x^2 + 3x = 3x - 2 - x^2 \rightarrow \\ &\rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \text{ No vale.} \end{cases} \end{aligned}$$

68 ■■■ Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación $\sqrt{7-3x} + x = 1$.

Dejamos solo el radical en el primer miembro y elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$\begin{aligned} \sqrt{7-3x} &= 1-x \rightarrow 7-3x = 1-2x+x^2 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \dots \end{aligned}$$

Después de resolver esta ecuación, es necesario comprobar las soluciones en la ecuación dada. Solo uno de los valores que has obtenido es solución de la ecuación.

$$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = 2: \sqrt{7 - 3 \cdot 2} + 2 = 1 + 2 = 3 \neq 1 \rightarrow \text{No vale.}$$

$$x = -3: \sqrt{7 - 3 \cdot (-3)} - 3 = 4 - 3 = 1 \rightarrow \text{Sí vale.}$$

La solución es $x = -3$.

69 ■■■ Resuelve como en el ejercicio anterior:

a) $\sqrt{x^2 + 7} + 2 = 2x$

b) $x + 1 - \sqrt{5x - 1} = 0$

c) $\sqrt{x + 7} = x + 1$

d) $\sqrt{2x - 3} + 1 = x$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{x^2 + 7} + 2 = 2x &\rightarrow \sqrt{x^2 + 7} = 2x - 2 \rightarrow (\sqrt{x^2 + 7})^2 = (2x - 2)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + 7 = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2/6 = -1/3 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$x = 3: \sqrt{3^2 + 7} + 2 = 4 + 2 = 2 \cdot 3 \rightarrow x = 3 \text{ es solución.}$$

$$\begin{aligned} x = -\frac{1}{3}: \sqrt{\frac{1}{9} + 7} + 2 &= \sqrt{\frac{64}{9}} + 2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} \neq -\frac{2}{3} \rightarrow \\ &\rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ no es solución.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x + 1 - \sqrt{5x - 1} = 0 &\rightarrow (x + 1)^2 = (\sqrt{5x - 1})^2 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + 2x + 1 = 5x - 1 \rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$x = 2: 2 + 1 - \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 3 - 3 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ es solución.}$$

$$x = 1: 1 + 1 - \sqrt{5 \cdot 1 - 1} = 2 - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ es solución.}$$

La ecuación tiene dos soluciones, $x = 2$ y $x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{x + 7} = x + 1 &\rightarrow (\sqrt{x + 7})^2 = (x + 1)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow x + 7 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$x = 2: \sqrt{2 + 7} = 2 + 1 \rightarrow x = 2 \text{ es solución.}$$

$$x = -3: \sqrt{-3 + 7} = 2 \neq -3 + 1 \rightarrow x = -3 \text{ no es solución.}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sqrt{2x-3} + 1 = x &\rightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = (x-1)^2 \rightarrow 2x-3 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$x = 2: \quad \sqrt{2 \cdot 2 - 3} + 1 = 1 + 1 = 2 \rightarrow x = 2 \text{ es la solución.}$$

70 ■■■ Ejercicio resuelto

Un depósito de agua para riego tiene un grifo de abastecimiento y un desagüe. El grifo llena el depósito en 9 horas. Si además del grifo se abre el desagüe, el depósito tarda 36 horas en llenarse. Averiguar cuánto tarda el desagüe en vaciar el depósito lleno, estando cerrado el grifo.

- El grifo llena, en 1 hora, $\frac{1}{9}$ del depósito.
- El desagüe vacía, en 1 hora, $\frac{1}{x}$ del depósito.

Abriendo los dos, llenan en 1 hora $\frac{1}{36}$ del depósito.

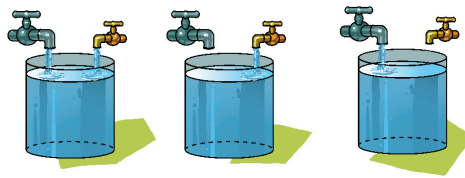
$$\text{Por tanto: } \frac{1}{9} - \frac{1}{x} = \frac{1}{36}$$

Resuelve la ecuación y di cuál es la solución.

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} - \frac{1}{x} = \frac{1}{36} &\rightarrow 36x \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{x} \right) = 36x \cdot \frac{1}{36} \rightarrow 4x - 36 = x \rightarrow \\ &\rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 12 \end{aligned}$$

El desagüe tarda 12 horas en vaciar el depósito.

- 71** ■■■ Dos grifos llenan un depósito en 3 horas si se abren a la vez. Si solo se abre uno de ellos, tardaría 5 horas en llenar el depósito. ¿Cuánto tardará el otro grifo en llenar el depósito en solitario?



Los dos grifos juntos, en 1 hora, llenan $\frac{1}{3}$ del depósito.

Uno de los grifos llena, en 1 hora, $\frac{1}{5}$ del depósito.

El otro grifo, en 1 hora, llena $\frac{1}{x}$ del depósito.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{15} \rightarrow x = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ h}$$

El otro grifo tarda 7 horas y media en llenar el depósito.

- 72** ■■■ Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos a la vez tardan 8 horas en llenar dicho depósito. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en llenarlo?

Un grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{x}$ del depósito, y el otro grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{2x}$ del depósito.

Los dos juntos, en 1 hora, llenan $\frac{1}{8}$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{3}{2x} = \frac{1}{8} \rightarrow 2x = 24 \rightarrow x = 12 \text{ h}$$

Uno de los grifos tarda 12 h, y el otro, 24 horas en llenar el depósito.

- 73** ■■■ Un pintor tarda 3 horas más que otro en pintar una pared. Trabajando juntos pintarían la misma pared en 2 horas. Calcula cuánto tarda cada uno en hacer el mismo trabajo en solitario.

Un pintor, en 1 hora, pinta $\frac{1}{x}$ de la pared.

El otro pintor, en 1 hora, pinta $\frac{1}{x+3}$ de la pared.

Entre los dos, en 1 hora, pintan $\frac{1}{2}$ de la pared.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x(x+3)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = 2x(x+3)\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x+3) + 2x = x(x+3) \rightarrow 2x+6+2x = x^2+3x \rightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \text{ No vale.} \end{cases}$$

Uno tarda 3 h y el otro tarda 6 horas en hacer el trabajo en solitario.