

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 37

PRACTICA

Operaciones con números enteros. Calculadora

1 ■■■ Calcula paso a paso y comprueba el resultado con la calculadora utilizando las teclas de paréntesis.

a) $2(15 - 7)^2 - 4^3$ b) $3 - 2(2^4 - 3 \cdot 5)^5$ c) $(3 \cdot 5^2 - 2^3 \cdot 5) : 7$

d) $8(2 - 5)^3 : 6^2$ e) $1 - [2^3(5 - 3^2)] : 32$ f) $-[3 - (-7)^2] - 2^4$

a) $2 \cdot 8^2 - 64 = 128 - 64 = 64$

b) $3 - 2(16 - 15)^5 = 3 - 2 = 1$

c) $(3 \cdot 25 - 8 \cdot 5) : 7 = 35 : 7 = 5$

d) $8(-3)^3 : 36 = -216 : 36 = -6$

e) $1 - [8(5 - 9)] : 32 = 1 - (-32) : 32 = 1 + 1 = 2$

f) $-(3 - 49) - 16 = 46 - 16 = 30$

Fracciones

2 ■■■ Agrupa las fracciones que sean equivalentes.

$$\frac{21}{49} \quad \frac{24}{36} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{14}{21} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{15}{35} \quad \frac{3}{7}$$

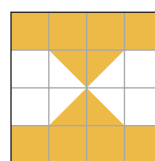
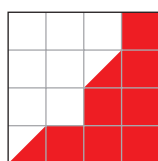
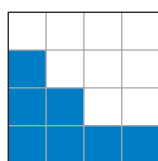
$$\frac{21}{49} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \quad \frac{24}{36} = \frac{14}{21} = \frac{10}{15} \quad \frac{4}{5}$$

3 ■■■ Simplifica las fracciones siguientes:

$$\frac{24}{60} \quad \frac{114}{72} \quad \frac{51}{68} \quad \frac{26}{39} \quad \frac{125}{50} \quad \frac{225}{400}$$

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}; \quad \frac{114}{72} = \frac{19}{12}; \quad \frac{51}{68} = \frac{3}{4}; \quad \frac{26}{39} = \frac{2}{3}; \quad \frac{125}{50} = \frac{5}{2}; \quad \frac{225}{400} = \frac{9}{16}$$

4 ■■■ Expresa en forma de fracción la parte coloreada de estas figuras:



$$\text{Azul} = \frac{7}{16}; \quad \text{rojo} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}; \quad \text{amarillo} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

5 ■■■ En cada apartado, reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:

a) $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{8}{15}$ b) $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{12}, -\frac{3}{4}$ c) $\frac{11}{24}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, -\frac{5}{3}$

a) $\frac{25}{30}, \frac{18}{30}, \frac{20}{30}, \frac{21}{30}, \frac{16}{30} \rightarrow \frac{8}{15} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{5}{6}$

b) $-\frac{12}{24}, -\frac{15}{24}, -\frac{14}{24}, -\frac{18}{24} \rightarrow -\frac{3}{4} < -\frac{5}{8} < -\frac{7}{12} < -\frac{1}{2}$

c) $\frac{11}{24}, -\frac{42}{24}, \frac{9}{24}, -\frac{4}{24}, \frac{10}{24}, -\frac{40}{24} \rightarrow -\frac{7}{4} < -\frac{5}{3} < -\frac{1}{6} < \frac{3}{8} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24}$

6 ■■■ Efectúa y simplifica descomponiendo en factores como en el ejemplo:

• $\frac{15}{21} \cdot \frac{7}{25} = \frac{15 \cdot 7}{21 \cdot 25} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5}$

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{20}{21}$

b) $\frac{6}{25} \cdot \frac{5}{18}$

c) $\frac{12}{7} \cdot \frac{35}{36}$

d) $\frac{9}{16} \cdot \frac{20}{27}$

e) $\frac{13}{12} \cdot \frac{84}{65}$

f) $\frac{90}{35} \cdot \frac{14}{36}$

a) $\frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 21} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{6 \cdot 5}{25 \cdot 18} = \frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{1}{15}$

c) $\frac{12 \cdot 35}{7 \cdot 36} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{3}$

d) $\frac{9 \cdot 20}{16 \cdot 27} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 3} = \frac{5}{12}$

e) $\frac{13 \cdot 84}{12 \cdot 65} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{7}{5}$

f) $\frac{90 \cdot 14}{35 \cdot 36} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2} = 1$

7 ■■■ Expresa como suma de un número entero y una fracción igual que se hace en el ejemplo:

• $\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

a) $\frac{8}{5}$

b) $\frac{15}{8}$

c) $\frac{16}{7}$

d) $-\frac{3}{2}$

e) $-\frac{7}{3}$

a) $\frac{8}{5} = \frac{5+3}{5} = 1 + \frac{3}{5}$

b) $\frac{15}{8} = \frac{8+7}{8} = 1 + \frac{7}{8}$

c) $\frac{16}{7} = \frac{14+2}{7} = 2 + \frac{2}{7}$

d) $-\frac{3}{2} = \frac{-2-1}{2} = -1 - \frac{1}{2}$

e) $-\frac{7}{3} = \frac{-6-1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

Cálculo mental

8 ■■■ Calcula mentalmente.

a) $-17 + (-13)$

b) $-15 + 17 - (-8)$

c) $5(-7 - 5)$

d) $-50 - 5(-11)$

e) $-3(6 + 4) + 7$

f) $(-3)^2 - (-2)^3$

a) -30

b) 10

c) -60

d) 5

e) -23

f) 17

9 ■■■ Calcula y simplifica mentalmente.

a) $2 + \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

d) $2 \cdot \frac{5}{4}$

e) $\frac{2}{3} : 2$

f) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$

h) $\frac{12}{7} : 3$

i) $\frac{7}{3} \cdot 21$

a) $\frac{7}{3}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{5}{2}$

e) $\frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{5}$

g) $\frac{3}{2}$

h) $\frac{4}{7}$

i) 49

10 ■■■ Calcula mentalmente el número que se pide en cada caso:

a) Los dos tercios de un número valen 22. ¿Cuál es el número?

b) Los cinco cuartos de un número valen 35. ¿Cuál es el número?

c) Los siete décimos de una cantidad son 210. ¿Cuál es esa cantidad?

a) 33

b) 28

c) 300

Operaciones con fracciones

11 ■■■ Calcula paso a paso y, después, comprueba el resultado con la calculadora utilizando las teclas de fracción y paréntesis.

a) $\frac{3}{5} \left(2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{6} : \frac{1}{2}$

b) $-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} : \frac{2}{3} \right)$

c) $3 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{8} (-2)$

d) $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) : \left[2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{3} \right) \right]$

a) $\frac{3}{5} \left(\frac{5}{3} \right) + \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

b) $-\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right) = -\frac{8}{12} + \frac{9}{12} - \frac{4}{12} - \frac{9}{12} = -1$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$c) 3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16} - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \frac{24}{8} - \frac{3}{8} - \frac{6}{8} = \frac{15}{8}$$

$$d) \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right) : \left(2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}\right) = \frac{11}{6} : \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{11}{6} : \frac{2}{3} = \frac{11}{4}$$

PÁGINA 38

12 ■■■ Calcula y comprueba con la calculadora.

$$a) \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$b) 5 : \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$c) -\frac{3}{8} \left[3 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17}{20} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right)\right]$$

$$d) \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) + 13 \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2\right] : \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$a) \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = 0$$

$$b) 5 : \frac{9}{4} - 3 : \frac{1}{4} = \frac{20}{9} - 12 = -\frac{88}{9}$$

$$c) -\frac{3}{8} \left[3 - \frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)\right] = -\frac{3}{8} \left(3 - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{8}(2) = -\frac{3}{4}$$

$$d) \left(\frac{5}{9} + 13 \cdot \frac{1}{9}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = 2 : \left(-\frac{2}{3}\right) = -3$$

13 ■■■ Reduce a una fracción.

$$a) \frac{3 + \frac{1}{2}}{7 - \frac{3}{2}}$$

$$b) \frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{12}}$$

$$c) \frac{\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}$$

$$a) \frac{\frac{7}{11}}{\frac{2}{2}} = \frac{7}{11}$$

$$b) \frac{\frac{-5}{12}}{\frac{3}{12}} = -\frac{5}{3}$$

$$c) \frac{\frac{21}{40}}{\frac{-3}{10}} = -\frac{7}{4}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

14 ■■■ Cuadrados mágicos. Completa cada casilla para que las filas, columnas y diagonales sumen lo mismo.

a)

1/6		5/6
	1/3	
1/2		

b)

		3/8
1/2	3/4	1

a)

1/6	2/3	5/6
1	1/3	1/3
1/2	2/3	1/2

b)

5/8	5/4	3/8
1/2	3/4	1
9/8	1/4	7/8

Potencias y raíces

15 ■■■ Calcula las potencias siguientes:

a) $(-3)^3$

b) $(-2)^4$

c) $(-2)^{-3}$

d) -3^2

e) -4^{-1}

f) $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

i) $\left(\frac{4}{3}\right)^0$

a) -27

b) 16

c) $-\frac{1}{8}$

d) -9

e) $-\frac{1}{4}$

f) 1

g) 8

h) 4

i) 1

16 ■■■ Expresa como una potencia de base 2 ó 3.

a) 64

b) 243

c) $\frac{1}{32}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $-\frac{1}{27}$

a) 2^6

b) 3^5

c) 2^{-5}

d) 3^{-1}

e) $-(3)^{-3}$

17 ■■■ Calcula.

a) $\left(\frac{3}{2} - 1\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

b) $\left(2 + \frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-2}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

b) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{49} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{49}$

18 ■■■ Expresa como potencia única.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^2$

b) $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$

c) $\left[\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{-1}\right]^3$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^2$

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$

b) $\frac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^2$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

19 ■■■ Calcula utilizando las propiedades de las potencias.

a) $\frac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4}$

b) $\frac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10}$

c) $\frac{2^{-5} \cdot 4^3}{16}$

d) $\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$

e) $\frac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$

f) $\frac{2^{-5} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-2}}{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 6^{-1}}$

👁 Mira el ejercicio resuelto 2 c) de la página 28.

a) $\frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^6}{3^2 \cdot 2^7} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

b) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{5}{2}$

c) $\frac{2^{-5} \cdot 2^6}{2^4} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}} = 3^4 = 81$

e) $\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4} = 2^{-5} \cdot 3^4 = \frac{81}{32}$

f) $\frac{2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-2}}{2^{-4} \cdot 2^4 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \frac{3}{2}$

20 ■■■ Simplifica.

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \frac{a^3}{b^2}$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \cdot (a^{-1})^{-2}$

c) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3} \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

d) $\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-3}\right]^{-1} (a^{-1} \cdot b)^{-2}$

a) $\frac{a^{-1}}{b^{-2}} = \frac{b^2}{a}$

b) $\frac{b^3}{a^3} \cdot a^2 = \frac{b^3}{a}$

c) $\frac{a^3 \cdot a^{-2}}{b^{-2}} = a \cdot b^2$

d) $\frac{b^3}{a^3} \cdot a^2 \cdot b^{-2} = \frac{b}{a}$

21 ■■■ Calcula.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

d) $\sqrt[5]{-1}$

a) 2

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{2}$

d) -1

22 ■■■ Halla las raíces siguientes:

a) $\sqrt[3]{216}$

b) $\sqrt[7]{-128}$

c) $\sqrt[5]{-243}$

d) $\sqrt[6]{4096}$

a) 6

b) -2

c) -3

d) 4

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

PIENSA Y RESUELVE

23 ■■■ Una mezcla de cereales está compuesta por $\frac{7}{15}$ de trigo, $\frac{9}{25}$ de avena y el resto de arroz.

- a) ¿Qué parte de arroz tiene la mezcla?
b) ¿Qué cantidad de cada cereal habrá en 600 g de mezcla?

a) Parte de arroz: $1 - \left(\frac{7}{15} + \frac{9}{25}\right) = \frac{13}{75}$

b) Trigo = 280 g; avena = 216 g; arroz = 104 g.

24 ■■■ Los $\frac{5}{12}$ de las entradas de un teatro son butacas, $\frac{1}{4}$ son entresuelo, y el resto, anfiteatro. De las 720 entradas que tiene el teatro, ¿cuántas son de anfiteatro? ¿Qué parte del total representan?

$$\frac{5}{12} \cdot 720 = 300 \text{ butaca}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 720 = 180 \text{ entresuelo}$$

$$720 - (300 + 180) = 240 \text{ son de anfiteatro}$$

$$\frac{240}{720} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{ parte que representan las entradas de anfiteatro.}$$

25 ■■■ Julia gastó $\frac{1}{3}$ del dinero que tenía en libros y $\frac{2}{5}$ en discos. Si le han sobrado 36 €, ¿cuánto tenía?

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{15} \text{ del total son } 36 \text{ €} \rightarrow \text{ total} = 36 \cdot \frac{15}{4} = 135 \text{ €}$$

26 ■■■ De los 300 libros de una biblioteca, $\frac{1}{6}$ son de poesía; 180, de novela, y el resto, de historia. ¿Qué fracción representan los libros de historia?

$$\frac{1}{6} \cdot 300 = 50 \text{ poesía; } 300 - (180 + 50) = 70$$

$$\frac{70}{300} = \frac{7}{30} \text{ son libros de historia.}$$

27 ■■■ El café pierde $\frac{1}{5}$ de su peso al tostarlo. Si queremos obtener 84 kg de café tostado, ¿qué cantidad de café tendremos que poner en la tostadora?

$$\frac{4}{5} \text{ del café sin tostar son } 84 \text{ kg de café tostado.}$$

$$84 \cdot \frac{5}{4} = 105 \text{ kg de café tendremos que poner en la tostadora.}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 39

- 29** ■■■ Del dinero de una cuenta bancaria, retiramos primero los $\frac{3}{8}$ y, después, los $\frac{7}{10}$ de lo que quedaba. Si el saldo actual es 1 893 €, ¿cuánto había al principio?

Se retiran primero $\frac{3}{8}$ y, después, $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{16}$.

La parte que queda es $1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{7}{16}\right) = \frac{3}{16}$ que son 1 893 €.

Lo que había al principio es $1\,893 \cdot \frac{16}{3} = 10\,096$ €.

- 30** ■■■ De un depósito de aceite, se vacía la mitad; de lo que queda, se vacía otra vez la mitad y, luego, los $\frac{11}{15}$ del resto. Si al final quedan 36 l, ¿cuántos había al principio?

Sacamos $\frac{1}{2}$; después, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Queda $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

Sacamos $\frac{11}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{60} \rightarrow$ quedan $\frac{1}{4} - \frac{11}{60} = \frac{1}{15}$, que son 36 litros.

Lo que había al principio son $36 \cdot 15 = 540$ litros.

- 31** ■■■ Compró a plazos una bicicleta que vale 540 €. Pago el primer mes los $\frac{2}{9}$; el segundo, los $\frac{7}{15}$ de lo que me queda por pagar, y luego, 124 €.

a) ¿Cuánto he pagado cada vez?

b) ¿Qué parte del precio me queda por pagar?

a) Primer mes: $540 \cdot \frac{2}{9} = 120$ € \rightarrow quedan por pagar 420 €.

Segundo mes: $420 \cdot \frac{7}{15} = 196$ €.

Tercer mes: 124 €.

b) Quedan por pagar: $540 - (120 + 196 + 124) = 100$ €.

$\frac{100}{540} = \frac{5}{27} \rightarrow$ Parte que queda por pagar.

- 32** ■■■ Gasto $\frac{1}{10}$ de lo que tengo ahorrado en mi hucha; después, ingreso $\frac{1}{15}$ de lo que me queda y aún me faltan 36 € para volver a tener la cantidad inicial. ¿Cuál era esa cantidad?

Gasto $\frac{1}{10}$, quedan $\frac{9}{10}$; ingreso $\frac{1}{15} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{50}$.

En la cuenta hay $1 - \frac{1}{10} + \frac{3}{50} = \frac{24}{25}$ de lo que había.

Falta $\frac{1}{25}$, que son 36 €.

La cantidad inicial es $25 \cdot 36 = 900$ €.

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 33** ■■■ La diferencia entre las diagonales de un rombo es 14 cm, y la menor es $\frac{4}{11}$ de la mayor. Halla sus longitudes.

La diferencia entre la diagonal mayor y la menor es $1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$.

Como $\frac{7}{11}$ son 14 cm, la longitud de la diagonal mayor es $14 \cdot \frac{11}{7} = 22$ cm.

La menor mide $\frac{4}{11} \cdot 22 = 8$ cm.

- 34** ■■■ En un rectángulo, la base mide 4 cm más que la altura, y esta es los $\frac{7}{9}$ de la base. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

La diferencia entre la base y la altura es $1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$ de la base, que son 4 cm.

La base mide $4 \cdot \frac{9}{2} = 18$ cm, y la altura, $\frac{7}{9} \cdot 18 = 14$ cm.

El perímetro del rectángulo es $(18 + 14) \cdot 2 = 64$ cm.

- 35** ■■■ Justifica cuál debe ser el valor de a , en cada caso, para que se verifique la igualdad:

a) $a^3 = 2^6$

b) $a^{-1} = 2$

c) $\sqrt{a} = \frac{4}{5}$

d) $\sqrt[4]{a} = 1$

e) $a^{-2} = \frac{1}{4}$

f) $a^{-5} = -1$

a) $a = 2^2$

b) $a = \frac{1}{2}$

c) $a = \frac{16}{25}$

d) $a = 1$

e) $a = 2$

f) $a = -1$

R REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

- 36** ■■■ Busca cuatro números fraccionarios comprendidos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. ¿Cuántos puedes escribir?

Buscamos fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ con un denominador común, por ejemplo 36:

$$\frac{1}{3} = \frac{12}{36} \quad \frac{1}{2} = \frac{18}{36}$$

Entre $\frac{12}{36}$ y $\frac{18}{36}$ están comprendidas $\frac{13}{36}$, $\frac{14}{36}$, $\frac{15}{36}$, $\frac{16}{36}$.

Si en lugar de 36 elegimos un denominador común muy grande, podemos escribir tantas como queramos. Hay infinitas.

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

37 ■■■ ¿Cuál es la fracción inversa de $-3/5$? ¿Y la de $1/7$? Justifica tu respuesta.

La inversa de $-\frac{3}{5}$ es $-\frac{5}{3}$ porque su producto es igual a 1: $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 1$

La de $\frac{1}{7}$ es 7, ya que $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

38 ■■■ La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores. Cuando escribimos $-\sqrt{4}$ nos referimos a la raíz negativa. Es decir, $-\sqrt{4} = -2$. ¿Cuál es el valor de las siguientes expresiones?:

- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|
| a) $-\sqrt{64}$ | b) $\sqrt[4]{81}$ | c) $-\sqrt{1}$ |
| d) $\sqrt[6]{1}$ | e) $-\sqrt{9}$ | f) $\sqrt[3]{-8}$ |
| a) -8 | b) 3 | c) -1 |
| d) 1 | e) -3 | f) -2 |

39 ■■■ ¿Por qué no se puede hallar la raíz de índice par de un número negativo?

Calcula, cuando sea posible, estas raíces:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\sqrt[4]{256}$ | b) $\sqrt[3]{-27}$ | c) $\sqrt[4]{-16}$ |
| d) $\sqrt[5]{-1}$ | e) $-\sqrt{36}$ | f) $\sqrt[6]{-1}$ |

Porque al elevar un número negativo a un exponente par, obtenemos un número positivo.

- | | | |
|---------|---------|---------------|
| a) 4 | b) -3 | c) Imposible. |
| d) -1 | e) -6 | f) Imposible. |

40 ■■■ Si $a < b$, compara los pares de fracciones de cada apartado (a y b son números naturales):

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$ | b) $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{b+1}$ | c) $\frac{a+1}{b}$ y $\frac{a}{b}$ |
| a) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ | b) $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+1}$ | c) $\frac{a+1}{b} > \frac{a}{b}$ |

PROFUNDIZA

41 ■■■ La diferencia entre dos fracciones es $1/3$ y la segunda es los $3/5$ de la primera. Calcula las dos fracciones.

$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ diferencia entre la mayor y la menor.

$\frac{2}{5}$ de la primera fracción es igual a $\frac{1}{3}$.

La primera es $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$.

La segunda es $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$.

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

42 ■■■ Observa:

$$1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

- a) Halla el valor de la expresión con 4 sumandos.
b) Si aumentamos el número de sumandos, ¿aumenta o disminuye el valor de la expresión?
c) Calcula el valor de la expresión cuando el número de sumandos sea 100.
d) ¿A qué valor se aproxima la expresión cuando hay infinitos sumandos?

a) $1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

b) $1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$

Aumenta el valor de la expresión porque la fracción que le restamos al 2 va siendo más pequeña a medida que aumenta el número de sumandos.


c) Con 100 sumandos: $2 - \frac{1}{100} = \frac{199}{100}$

d) Cada vez restaremos a 2 un número menor.

Por ejemplo con 10 000 sumando obtenemos $2 - \frac{1}{10\,000}$ que es un número muy próximo a 2.

El valor de la expresión se aproxima a 2.

43 ■■■ ¿En qué número termina 2^{83} ?

 Observa en qué cifra terminan las sucesivas potencias de 2 y busca una regla que te permita saber la última cifra de cualquier potencia de base 2.

$$2^1 = 2 \quad 2^5 = 32$$

$$2^2 = 4 \quad 2^6 = 64$$

$$2^3 = 8 \quad 2^7 = 128$$

$$2^4 = 16 \quad 2^8 = 256$$

Las cifras 2, 4, 8, 6 se repiten de 4 en 4.

Como $83 = 80 + 3 \rightarrow 2^{83}$ terminará en la misma cifra que 2^3 , en 8.

PÁGINA 61

PRACTICA

Fracciones y decimales

1 ■■■ Expresa como un número decimal las siguientes fracciones:

$$\frac{9}{25} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{23}{6} \quad \frac{17}{200} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{233}{990} \quad \frac{13}{22}$$

$$\frac{9}{25} = 0,36; \quad \frac{13}{9} = 1,4\overline{4}; \quad \frac{23}{6} = 3,8\overline{3}; \quad \frac{17}{200} = 0,085$$

$$\frac{5}{7} = 0,7\overline{14285}; \quad \frac{233}{990} = 0,2\overline{35}; \quad \frac{13}{22} = 0,5\overline{90}$$

2 ■■■ Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos o periódicos (intenta dar la respuesta antes de efectuar la división):

$$\frac{4}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{13}{11} \quad \frac{17}{60} \quad \frac{81}{250}$$

Decimales exactos: $\frac{2}{5}, \frac{1}{50}, \frac{81}{250}$

Decimales periódicos: $\frac{4}{3}, \frac{13}{11}, \frac{17}{60}$

3 ■■■ Escribe tres números que estén comprendidos entre cada par de decimales:

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|------------------------|
| a) 1,6 y 1,8 | b) 0,98 y 1 | c) 0,28 y 0,29 |
| d) 0,345 y 0,346 | e) $2,\overline{3}$ y 2,4 | f) -4,5 y -4,4 |
| a) 1,65; 1,7; 1,75 | b) 0,982; 0,983; 0,984 | c) 0,283; 0,285; 0,287 |
| d) 0,3451; 0,3452; 0,3456 | e) 0,234; 0,235; 0,236 | f) -4,45; -4,46; -4,47 |

4 ■■■ Ordena de menor a mayor en cada apartado:

- | | |
|---|---|
| a) 3,56; $3,5\overline{6}$; $3,\overline{5}$; $3,\overline{56}$ | b) -1,32; $-1,3\overline{2}$; $-1,\overline{32}$; $-1,\overline{3}$ |
| a) $3,\overline{5} < 3,56 < 3,\overline{56} < 3,5\overline{6}$ | b) $-1,\overline{3} < -1,\overline{32} < -1,3\overline{2} < -1,32$ |

5 ■■■ Expresa en forma de fracción.

- | | | |
|---------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| a) 3,7 | b) 0,002 | c) -1,03 |
| d) $2,\overline{5}$ | e) $0,\overline{21}$ | f) $14,\overline{3}$ |
| a) $\frac{37}{10}$ | b) $\frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$ | c) $-\frac{103}{100}$ |
| d) $\frac{23}{9}$ | e) $\frac{21}{99} = \frac{7}{33}$ | f) $\frac{129}{9} = \frac{43}{3}$ |

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

6 ■■■ Expresa como fracción.

a) $0,3\overline{2}$

b) $1,0\overline{3}$

c) $0,0\overline{12}$

a) $\frac{29}{90}$

b) $\frac{93}{90} = \frac{31}{30}$

c) $\frac{12}{990} = \frac{2}{165}$

7 ■■■ ¿Cuáles de los siguientes números son racionales? Pon en forma de fracción los que sea posible:

a) $0,018$

b) $25,\overline{3}$

c) $1,212112111\dots$

d) 2π

e) $7,03232\dots$

f) $0,\overline{23}$

Racionales: $0,018$; $25,\overline{3}$; $7,03232\dots$; $0,\overline{23}$

$$0,018 = \frac{18}{1000} = \frac{9}{500}; \quad 25,\overline{3} = \frac{228}{9} = \frac{76}{3}; \quad 7,0\overline{32} = \frac{6962}{990} = \frac{3481}{495}; \quad 0,\overline{23} = \frac{23}{99}$$

8 ■■■ Calcula pasando a fracción.

a) $3,5 + 2,\overline{3}$

b) $0,\overline{12} - 0,2$

c) $1,\overline{6} - 1,0\overline{2}$

d) $3,\overline{42} + 7,\overline{6}$

a) $3,5 + 2,\overline{3} = \frac{35}{10} + \frac{21}{9} = \frac{7}{2} + \frac{7}{3} = \frac{35}{6}$

b) $0,\overline{12} - 0,2 = \frac{12}{99} - \frac{2}{10} = \frac{4}{33} - \frac{1}{5} = -\frac{13}{165}$

c) $1,\overline{6} - 1,0\overline{2} = \frac{15}{9} - \frac{92}{90} = \frac{29}{45}$

d) $3,\overline{42} + 7,\overline{6} = \frac{339}{99} + \frac{69}{9} = \frac{122}{11}$

9 ■■■ Comprueba, pasando a fracción, que el resultado de estas operaciones es un número entero:

a) $2,\overline{3} + 4,\overline{6}$

b) $6,\overline{17} + 3,\overline{82}$

a) $2,\overline{3} + 4,\overline{6} = \frac{21}{9} + \frac{42}{9} = \frac{63}{9} = 7$

b) $6,\overline{17} + 3,\overline{82} = \frac{611}{99} + \frac{379}{99} = \frac{990}{99} = 10$

Radicales

10 ■■■ Simplifica las expresiones que puedas, y en las restantes, indica por qué no se pueden simplificar.

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

c) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

e) $2\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5}$

f) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $3\sqrt{2}$

b) No se puede, porque tienen distinto radicando.

c) $-\sqrt{3}$

d) Igual que b).

e) $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

11 ■■■ Simplifica si es posible.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$

e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$

f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

a) $\sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{80}$

c) $\sqrt[3]{20}$

d) No es posible.

e) $\sqrt[4]{81} = 3$

f) No es posible.

12 ■■■ Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(\sqrt[4]{2})^4$

b) $(\sqrt[3]{2})^6$

c) $(\sqrt[6]{2^2})^3$

d) $\sqrt[3]{10} \sqrt[3]{100}$

e) $\sqrt[5]{2} \sqrt[5]{16}$

f) $\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{81}$

a) 2

b) 2^2

c) 2

d) 10

e) 2

f) 9

Aproximaciones y errores

13 ■■■ Aproxima, en cada caso, al orden de la unidad indicada:

a) 2,3148 a las centésimas.

b) 43,18 a las unidades.

c) 0,00372 a las milésimas.

d) 13 847 a las centenas.

e) 4 723 a los millares.

f) 37,9532 a las décimas.

a) 2,31

b) 43

c) 0,004

d) 13 800

e) 5 000

f) 38,0

14 ■■■ Expresa con dos cifras significativas las cantidades siguientes:

a) Presupuesto de un club: 1 843 120 €.

b) Votos de un partido político: 478 235.

c) Precio de una empresa: 15 578 147 €.

d) Tamaño de un ácaro: 1,083 mm.

a) 1,8 millones de euros.

b) 480 000 votos.

c) 16 000 000 €

d) 1,1 mm

15 ■■■ ¿En cuál de las aproximaciones dadas se comete menos error absoluto?

a) $\frac{14}{3} \approx \begin{matrix} < 4,6 \\ < 4,7 \end{matrix}$

b) $1,546 \approx \begin{matrix} < 1,5 \\ < 1,6 \end{matrix}$

a) $\frac{14}{3} - 4,6 = 0,0666\dots$

b) $1,546 - 1,5 = 0,046$

$4,7 - \frac{14}{3} = 0,0333\dots$

$1,6 - 1,546 = 0,054$

Con 4,7 se comete menos error absoluto.

Con 1,5 se comete menos error absoluto.

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 62

16 ■■■ Calcula el error absoluto cometido en cada caso:

	CANTIDAD REAL	CANTIDAD APROXIMADA
PRECIO DE UN COCHE	12 387 €	12 400 €
TIEMPO DE UNA CARRERA	81,4 min	80 min
PORCENTAJE DE AUMENTO	32,475%	32,5%
DISTANCIA ENTRE DOS PUEBLOS	13,278 km	13,3 km

Precio de un coche: $12\,400 - 12\,387 = 13 \text{ €}$

Tiempo de una carrera: $81,4 - 80 = 1,4 \text{ min}$

Porcentaje de aumento: $32,5 - 32,475 = 0,025\%$

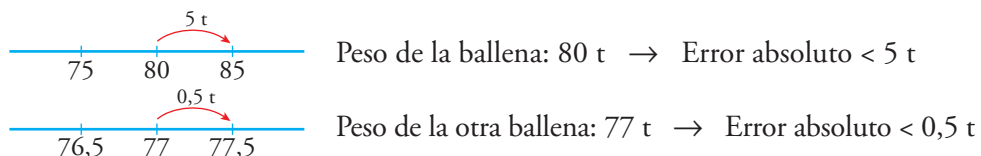
Distancia entre dos pueblos: $13,3 - 13,278 = 0,022 \text{ km}$

18 ■■■ a) Sabemos que el peso de cierta ballena está comprendido entre 75 y 85 toneladas. Si decimos que pesa 80 t, ¿qué podemos decir del error absoluto cometido?

b) Otra ballena ha sido pesada con más precisión: sabemos que pesa entre 76,5 t y 77,5 t. Si decimos que pesa 77 t, ¿qué podemos decir del error absoluto cometido?

c) ¿Por qué en el segundo caso es mayor la precisión (77 t) que en el anterior (80 t) si en ambos casos hemos utilizado dos cifras significativas para expresar el peso?

El error absoluto depende de las cifras que no aparecen.



El menor error relativo se da en el segundo caso, porque sabemos que la pesada se hizo con más precisión empleando tres cifras significativas.

19 ■■■ ¿Cuál de las siguientes medidas es más precisa (tiene menos error relativo)? Di, en cada una, de qué orden es el error absoluto cometido:

a) Altura de una chica: 1,75 m. b) Precio de un televisor: 1 175 €.

c) Tiempo de un anuncio: 95 segundos.

d) N.º de oyentes de un programa de radio: 2 millones.

a) Altura: $1,75 \text{ m} \rightarrow \text{Error absoluto} < 0,005 \text{ m}$

b) Precio: $1\,175 \text{ €} \rightarrow \text{Error absoluto} < 0,5 \text{ €}$

c) Tiempo: $95 \text{ s} \rightarrow \text{Error absoluto} < 0,5 \text{ s}$

d) N.º de oyentes: 2 millones → Error absoluto < 500 000

La de menor error relativo es la b), porque tiene más cifras significativas.

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Notación científica

20 ■■■ Escribe los números siguientes con todas sus cifras:

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $4 \cdot 10^7$ | b) $5 \cdot 10^{-4}$ | c) $9,73 \cdot 10^8$ |
| d) $8,5 \cdot 10^{-6}$ | e) $3,8 \cdot 10^{10}$ | f) $1,5 \cdot 10^{-5}$ |
| a) 40 000 000 | b) 0,0005 | c) 973 000 000 |
| d) 0,0000085 | e) 38 000 000 000 | f) 0,000015 |

21 ■■■ Escribe estos números en notación científica:

- | | | | |
|----------------------|----------------------|---------------------|-------------------------|
| a) 13 800 000 | b) 0,000005 | c) 4 800 000 000 | d) 0,0000173 |
| a) $1,38 \cdot 10^7$ | b) $5 \cdot 10^{-6}$ | c) $4,8 \cdot 10^9$ | d) $1,73 \cdot 10^{-5}$ |

22 ■■■ Expresa en notación científica.

- a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.
b) Caudal de una catarata: 1 200 000 l/s.
c) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/s.
d) Emisión de CO₂ en un año en España: 54 900 000 000 kg.
- a) $1,5 \cdot 10^8$ km b) $1,2 \cdot 10^6$ l/s c) $3 \cdot 10^8$ m/s d) $5,49 \cdot 10^{10}$ kg

23 ■■■ Di cuál debe ser el valor de n para que se verifique la igualdad en cada caso:

- | | | |
|---|---|------------|
| a) $3\,570\,000 = 3,57 \cdot 10^n$ | b) $0,000083 = 8,3 \cdot 10^n$ | |
| c) $157,4 \cdot 10^3 = 1,574 \cdot 10^n$ | d) $93,8 \cdot 10^{-5} = 9,38 \cdot 10^n$ | |
| e) $14\,700 \cdot 10^5 = 1,47 \cdot 10^n$ | f) $0,003 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^n$ | |
| a) $n = 6$ | b) $n = -5$ | c) $n = 5$ |
| d) $n = -4$ | e) $n = 9$ | f) $n = 5$ |

24 ■■■ Expresa en notación científica y calcula.

- a) $\frac{0,00054 \cdot 12\,000\,000}{250\,000 \cdot 0,00002}$
- b) $\frac{1\,320\,000 \cdot 25\,000}{0,000002 \cdot 0,0011}$
- c) $\frac{0,000015 \cdot 0,000004}{1\,250\,000 \cdot 600\,000}$
- d) $(0,0008)^2 \cdot (30\,000)^2$
- a) $\frac{5,4 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^7}{2,5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \frac{6,48 \cdot 10^{11}}{5} = 1,296 \cdot 10^{11}$
- b) $\frac{1,32 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 1,1 \cdot 10^{-3}} = \frac{3,3 \cdot 10^{10}}{2,2 \cdot 10^{-9}} = 1,5 \cdot 10^{19}$
- c) $\frac{1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{1,25 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^5} = \frac{6 \cdot 10^{-11}}{7,5 \cdot 10^{11}} = 0,8 \cdot 10^{-22} = 8 \cdot 10^{-23}$
- d) $6,4 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^8 = 5,76 \cdot 10^2$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

25 ■■■ Efectúa las siguientes operaciones como en el ejemplo y, después, comprueba el resultado con la calculadora:

$$\bullet 2 \cdot 10^{-5} + 1,8 \cdot 10^{-6} = 20 \cdot 10^{-6} + 1,8 \cdot 10^{-6} = (20 + 1,8) \cdot 10^{-6} = 21,8 \cdot 10^{-6} = 2,18 \cdot 10^{-5}$$

a) $3,6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}$

b) $5 \cdot 10^9 + 8,1 \cdot 10^{10}$

c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}$

d) $5,32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

a) $3,6 \cdot 10 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{11} = (36 - 4) \cdot 10^{11} = 32 \cdot 10^{11} = 3,2 \cdot 10^{12}$

b) $5 \cdot 10^9 + 81 \cdot 10^9 = 86 \cdot 10^9 = 8,6 \cdot 10^{10}$

c) $80 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-9} = 75 \cdot 10^{-9} = 7,5 \cdot 10^{-8}$

d) $532 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6} = 540 \cdot 10^{-6} = 5,4 \cdot 10^{-4}$

PÁGINA 63

26 ■■■ Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.

a) $(3 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^6)$

b) $(2 \cdot 10^{-8}) \cdot (1,5 \cdot 10^{12})$

c) $(4 \cdot 10^8) + (5 \cdot 10^7)$

d) $(4 \cdot 10^{-3}) - (5 \cdot 10^{-4})$

e) $(8 \cdot 10^{11}) : (5 \cdot 10^3)$

f) $(8,5 \cdot 10^{-6}) : (2 \cdot 10^4)$

a) $6 \cdot 10^{11}$

b) $3 \cdot 10^4$

c) $40 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^7 = 45 \cdot 10^7 = 4,5 \cdot 10^8$

d) $40 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-4} = 35 \cdot 10^{-4} = 3,5 \cdot 10^{-3}$

e) $1,6 \cdot 10^8$

f) $4,25 \cdot 10^{-10}$

27 ■■■ El diámetro de un virus es $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6 370 km).

Circunferencia de la Tierra = $2 \cdot \pi \cdot 6\,370 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^{10}$ mm

Número de virus necesarios para rodearla: $4 \cdot 10^{10} : 5 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{13}$ virus

28 ■■■ La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s aproximadamente.

a) ¿Qué distancia recorre la luz del Sol en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5,914 \cdot 10^6$ km).

a) Distancia que recorre la luz en un año:

$$3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

b) Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Plutón:

$$t = \frac{5,914 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 19,7 \text{ segundos}$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

29 ■■■ La estrella Alfa-Centauro está a 4,3 años-luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

(Año-luz: distancia recorrida por la luz en un año).

$$4,3 \text{ años luz} = 4,3 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 4,07 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

Porcentajes

30 ■■■ Calcula los porcentajes siguientes:

a) 28% de 325

b) 80% de 37

c) 3% de 18

d) 0,7% de 4 850

e) 2,5% de 14 300

f) 130% de 250

a) 91

b) 29,6

c) 0,54

d) $0,007 \cdot 4 850 = 33,95$

e) $0,025 \cdot 14 300 = 357,5$

f) $1,3 \cdot 250 = 325$

31 ■■■ ¿Qué porcentaje representa?

a) 78 de 342

b) 420 de 500

c) 25 de 5 000

d) 340 de 200

a) $\frac{78}{342} \cdot 100 \rightarrow 22,81\%$

b) 84%

c) 5%

d) 170%

32 ■■■ Calcula, en cada caso, la cantidad inicial de lo que conocemos:

a) El 28% es 98.

b) El 15% es 28,5.

c) El 2% es 325.

d) El 150% es 57.

a) $\frac{98}{0,28} = 350$

b) $\frac{28,5}{0,15} = 190$

c) $\frac{325}{0,02} = 16 250$

d) $\frac{57}{1,5} = 38$

33 ■■■ ¿Por qué número hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la final en cada uno de los siguientes casos?:

a) Aumenta un 12%.

b) Disminuye el 37%.

c) Aumenta un 150%.

d) Disminuye un 2%.

e) Aumenta un 10% y, después, el 30%.

f) Disminuye un 25% y aumenta un 42%.

a) $1 + 0,12 = 1,12$

b) $1 - 0,37 = 0,63$

c) $1 + 1,5 = 2,5$

d) $1 - 0,02 = 0,98$

e) $(1 + 0,1)(1 + 0,3) = 0,77$

f) $(1 - 0,25)(1 + 0,42) = 1,065$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

34 ■■■ En cada uno de los apartados siguientes, calcula el índice de variación y la cantidad final:

- a) 325 aumenta el 28%. b) 87 disminuye el 80%.
c) 425 aumenta el 120%. d) 125 disminuye el 2%.
e) 45 aumenta el 40% y el 30%. f) 350 disminuye el 20% y el 12%.

- a) $I_V = 1,28$ $C_F = 416$
b) $I_V = 0,2$ $C_F = 17,4$
c) $I_V = 2,2$ $C_F = 935$
d) $I_V = 0,98$ $C_F = 122,5$
e) $I_V = 1,4 \cdot 1,3 = 1,82$ $C_F = 81,9$
f) $I_V = 0,8 \cdot 0,88 = 0,704$ $C_F = 246,4$

35 ■■■ ¿Qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde a los siguientes índices de variación?:

- a) 1,54 b) 0,18 c) 0,05
d) 2,2 e) 1,09 f) 3,5
a) Aumento 54%. b) Disminución 82%. c) Disminución 95%.
d) Aumento 120%. e) Aumento 9%. f) Aumento 250%.

36 ■■■ Calcula, en cada caso, la cantidad que falta:

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN POR-CENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	↑ +18%	1 003
4 500	↓ -48%	2 340
75	↑ +110%	157,5
5 600	↓ -18%	4 592
326	↑ +85%	603,1
125	↑ +32%	165
4 173,4	↓ -0,8%	4 140

37 ■■■ Expresa cada fracción como un porcentaje, y viceversa:

FRACCIÓN	13/20	77/200	11/60	31/125	41/300 (*)
PORCENTAJE	65%	38,5%	18,3%	24,8%	13,6%

$$(*) 13,6\overline{6} = \frac{123}{9} \rightarrow \frac{123}{9} : 100 = \frac{123}{900} = \frac{41}{300}$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Interés compuesto

- 38** ■■■ Colocamos 13 500 € al 4,8% anual durante tres años. ¿En cuánto se transformará?

$$C_F = 13\,500 \left(1 + \frac{4,8}{100}\right)^3 = 15\,538,8 \text{ €}$$

- 39** ■■■ ¿En cuánto se transformará un capital de 28 500 € colocado al 0,36% mensual durante dos años y medio?

$$C_F = 28\,500 \left(1 + \frac{0,36}{100}\right)^{30} = 31\,744,2 \text{ €}$$

PÁGINA 64

- 40** ■■■ ¿En cuánto se convertirá un capital de 18 000 € al 6% anual si se mantiene en el banco durante 2 años y 5 meses sin retirar los intereses?

$$6\% \text{ anual} \rightarrow \frac{6}{12} = 0,5 \text{ mensual}$$

$$2 \text{ años y } 5 \text{ meses} \rightarrow 29 \text{ meses}$$

$$C_F = 18\,000 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{29} = 20\,801,2 \text{ €}$$

- 41** ■■■ Calcula en cuánto se transformará un capital de 60 000 € colocado a interés compuesto en las siguientes condiciones:

- a) Al 4% anual durante 3 años. b) Al 2,8% anual durante 5 años.
c) Al 0,4% mensual durante 2 años. d) Al 6% anual durante 8 meses.

a) $C_F = 60\,000 (1,04)^3 = 67\,491,8 \text{ €}$

b) $C_F = 60\,000 (1,028)^5 = 68\,883,8 \text{ €}$

c) $C_F = 60\,000 \left(1 + \frac{0,4}{100}\right)^{24} = 66\,032,9 \text{ €}$

d) 6% anual $\rightarrow \frac{6}{12} = 0,5\% \text{ mensual}$

$$C_F = 60\,000 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^8 = 62\,442,42 \text{ €}$$

Cálculo mental

- 42** ■■■ Calcula mentalmente.

- | | | | |
|----------------|------------------|-------------------|------------------|
| a) $8,7 - 2,4$ | b) $3,99 - 0,90$ | c) $13,2 + 5,8$ | d) $5,73 + 3,27$ |
| e) $2,5 : 5$ | f) $7,8 : 2$ | g) $3,5 \cdot 20$ | h) $2,5 \cdot 4$ |
| a) 6,3 | b) 3,09 | c) 19 | d) 9 |
| e) 0,5 | f) 3,9 | g) 70 | h) 10 |

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

43 ■■■ Expresa mentalmente como potencia de base 10.

- | | | |
|--------------------------|-------------------|-------------------|
| a) Mil millones. | b) Una milésima. | c) 0,0000001 |
| d) $10^{-12} \cdot 10^7$ | e) $10 : 10^{-5}$ | f) $1 : 100\ 000$ |
| a) 10^9 | b) 10^{-3} | c) 10^{-7} |
| d) 10^{-5} | e) 10^6 | f) 10^{-5} |

44 ■■■ ¿Qué porcentajes representan?

- | | | | |
|---------------------|------------------|------------------|------------------|
| a) $\frac{27}{100}$ | b) $\frac{1}{4}$ | c) $\frac{4}{5}$ | d) $\frac{3}{2}$ |
| a) 27% | b) 25% | c) 80% | d) 150% |

45 ■■■ Calcula mentalmente.

- | | | | |
|---------------|---------------|-----------------|----------------|
| a) 10% de 340 | b) 25% de 400 | c) 75% de 4 000 | d) 150% de 200 |
| a) 34 | b) 100 | c) 3 000 | d) 300 |

46 ■■■ ¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto a su total?:

- | | | | |
|-------------|------------|----------------|------------------------|
| a) 16 de 32 | b) 3 de 12 | c) 15 de 1 500 | d) 8 de 24 |
| a) 50% | b) 25% | c) 1% | d) $33,\overline{3}\%$ |

47 ■■■ Calcula mentalmente.

- | | | | |
|--|--|---------------------|-----------------------|
| a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$ | b) $(1,5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$ | | |
| c) $(3,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$ | d) $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$ | | |
| e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^7)$ | f) $(4,4 \cdot 10^8) : (2 \cdot 10^{-5})$ | | |
| g) $(5 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^8)$ | h) $(5 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{-9})$ | | |
| a) $6 \cdot 10^{17}$ | b) $3 \cdot 10^{-12}$ | c) $6,8 \cdot 10^9$ | d) $4 \cdot 10^{-5}$ |
| e) $3 \cdot 10^{-14}$ | f) $2,2 \cdot 10^{13}$ | g) 10^{12} | h) $4 \cdot 10^{-15}$ |

PIENSA Y RESUELVE

48 ■■■ De los 524 alumnos de bachillerato de un colegio, el 12% repite curso y el 13% ha pasado con alguna materia pendiente. ¿Cuántos alumnos han pasado con todas las materias aprobadas?

$$524 \cdot 0,12 + 524 \cdot 0,13 = 131$$

$$524 - 131 = 393 \text{ alumnos han pasado con todas las materias aprobadas.}$$

49 ■■■ Entre julio y agosto de 2006, el número de infracciones graves que denunció la Dirección General de Tráfico fueron 81 835 de las que 72 533 correspondieron a hombres. ¿Qué porcentaje de denuncias correspondieron a mujeres?

$$81\ 835 - 72\ 533 = 9\ 302$$

$$\frac{9\ 302}{81\ 835} \approx 0,1137 \rightarrow \text{El } 11,37\% \text{ correspondieron a mujeres.}$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 50** ■■■ La información nutricional de una marca de leche dice que, en un litro, hay 160 mg de calcio, que es el 20% de la cantidad diaria recomendada. Calcula la cantidad diaria que debe tomar una persona.

$160 : 0,20 = 800$ mg es lo que debe tomar una persona.

- 51** ■■■ El número de plazas de un centro escolar es 450. Si el número de plazas solicitadas fue 540, ¿qué tanto por ciento representan las solicitudes?

$540 : 450 = 1,2 \rightarrow$ El 120%.

- 52** ■■■ Los organizadores de un concierto han decidido suspenderlo porque solo se han vendido el 0,8% de las entradas disponibles. ¿Cuántas entradas se han puesto a la venta si solo se han vendido 20?

$20 : 0,008 = 2\,500$ entradas.

- 53** ■■■ He pagado 870 € por un artículo que costaba 750 € sin IVA. ¿Qué porcentaje de IVA me han aplicado?

$870 : 750 = 1,16 \rightarrow$ El 16%.

- 54** ■■■ El presupuesto en educación de una comunidad autónoma ha pasado de $8,4 \cdot 10^6$ € a $1,3 \cdot 10^7$ € en los últimos tres años. ¿Cuál ha sido la variación porcentual?

$1,3 \cdot 10^7 : 8,4 \cdot 10^6 \approx 1,55 \rightarrow$ El 55% de aumento.

- 55** ■■■ En una papelería hacen una rebaja del 15% en todos los artículos. ¿Cuál será el precio que hemos de pagar por una cartera de 24 € y una calculadora de 18 €?

Cartera: $24 \cdot 0,85 = 20,4$ €

Calculadora: $18 \cdot 0,85 = 15,3$ €

- 56** ■■■ Si el precio del abono-transporte de una ciudad subió el 12%, ¿cuál era el precio anterior si ahora cuesta 35,84 €?

Precio anterior: $35,84 : 1,12 = 32$ €

- 57** ■■■ He pagado 187,2 € por un billete de avión que costaba 240 €. ¿Qué porcentaje de descuento me hicieron?

$187,2 : 240 = 0,78 \rightarrow 1 - 0,78 = 0,22$

Descuento: 22%

- 58** ■■■ El precio del kilo de tomates subió un 20% y después bajó un 25%. Si antes costaba 1,80 €, ¿cuál es el precio actual?

$1,8 \cdot 1,2 \cdot 0,75 = 1,62$ €

PÁGINA 65

- 59** ■■■ El número de espectadores de un concurso de televisión que comenzó en octubre aumentó un 23% en noviembre y disminuyó un 18% en diciembre. Si al terminar diciembre tuvo 2 202 000 espectadores, ¿cuántos tenía en el mes de octubre?

$$\frac{2\,202\,000}{1,23 \cdot 0,82} = 2\,183\,224 \text{ espectadores en octubre.}$$

- 60** ■■■ Si un comerciante aumenta el precio de sus productos un 25% y, después, los rebaja un 25%, ¿cuál ha sido la variación porcentual que experimentan los artículos respecto al precio inicial? ¿Y si hiciera lo mismo aplicando el 50%?

a) $1,25 \cdot 0,75 = 0,9375$

$1 - 0,9375 = 0,0625 \rightarrow$ Corresponde a una disminución del 6,25%.

b) $1 - 1,5 \cdot 0,5 = 0,25 \rightarrow$ Corresponde a una disminución del 25%.

- 61** ■■■ Los ingresos mensuales de un negocio han aumentado un 20% y un 30% en los dos meses anteriores. En el mes actual han disminuido un 25% y han sido 13 850 €. ¿Cuál ha sido la variación porcentual? Calcula los ingresos del negocio hace tres meses.

$1,2 \cdot 1,3 \cdot 0,75 = 1,17 \rightarrow$ Supone un aumento del 17%.

$13\,850 : 1,17 = 11\,837,6 \text{ €}$ son los ingresos de hace tres meses.

- 62** ■■■ Para que el área de un triángulo fuera 100 m^2 , su altura actual tendría que disminuir un 18%. Si la base mide 16,8 m, ¿cuánto mide la altura?

$$\frac{16,8 \cdot al}{2} = 100 \rightarrow al = 11,9 \text{ m tendría que medir la altura para que el área fuera } 100 \text{ m}^2.$$

$h \cdot 0,82 = 11,9 \rightarrow h = \frac{11,9}{0,82} \approx 14,5 \text{ m}$ mide la altura.

- 63** ■■■ Un camión de reparto ha entregado por la mañana los $\frac{13}{20}$ de la carga que llevaba y, por la tarde, el $17,3\%$ de la misma. ¿Qué fracción de la carga queda por repartir?

$17,3\% = \frac{156}{9} = \frac{52}{3} \rightarrow 17,3\% \approx \frac{52}{300}$ reparte por la tarde.

$\frac{13}{20} + \frac{52}{300} = \frac{247}{300}$ ha repartido.

Queda por repartir $\frac{53}{300}$ de la carga.

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 64** ■■■ Un capital colocado al 8% anual durante 2 años se ha convertido en 5 598,72 €. ¿Cuál era el capital inicial?

$$C \cdot (1,08)^2 = 5\,598,72 \rightarrow C = 5\,598,72 : 1,08^2 = 5\,184$$

Así, el capital inicial era 5 184 €.

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

- 65** ■■■ Comprueba que $2,6\overline{9}$ y $2,7$ se expresan mediante la misma fracción. ¿Ocurrirá lo mismo con $4,0\overline{9}$ y $4,1$? ¿Con qué decimal exacto podemos identificar los siguientes números: $0,02\overline{9}$; $5,\overline{9}$; $8,13\overline{9}$?

$$\left. \begin{array}{l} 2,6\overline{9} = \frac{243}{90} = \frac{27}{10} \\ 2,7 = \frac{27}{10} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4,0\overline{9} = \frac{369}{90} = \frac{41}{10} \\ 4,1 = \frac{41}{10} \end{array}$$

$$0,02\overline{9} = 0,03; \quad 5,\overline{9} = 6; \quad 8,13\overline{9} = 8,14$$

- 66** ■■■ a) Calcula en forma decimal el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

b) Escribe el resultado en forma de fracción.

a) $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \dots = 0,777\dots = 0,\overline{7}$

b) $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$

- 67** ■■■ Una cantidad P rebajada un 18% se ha convertido en una cantidad Q , de forma que $Pk = Q$.

a) ¿Cuál es el valor de k ?

b) ¿Y si en lugar de rebajarla la aumentamos un 18%?

a) $P \cdot 0,82 = Q; \quad k = 0,82$

b) $P \cdot 1,18 = Q; \quad k = 1,18$

- 68** ■■■ ¿Qué porcentaje es?

a) El 40% del 40%.

b) El 25% del 20%.

c) El 30% del 120%.

d) El 150% del 20%.

a) $0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \rightarrow 16\%$

b) $0,25 \cdot 0,20 = 0,05 \rightarrow 5\%$

c) $0,30 \cdot 1,2 = 0,36 \rightarrow 36\%$

d) $1,5 \cdot 0,2 = 0,3 \rightarrow 30\%$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 69** ■■■ He pagado 200 € por un abrigo en el que me han hecho una rebaja del 10%. Si quiero saber el precio inicial, ¿puedo calcularlo aumentando 200 en un 10%? Razona la respuesta.

Si aumento un 10% a 200, obtengo 220 €.

Si disminuyo un 10% esa cantidad, 220, obtengo 198 €, que no es lo que pagué.

El precio del abrigo era $200 : 0,9 = 222,2$ €.

- 70** ■■■ Si en una factura nos tienen que aumentar el 16% de IVA y nos hacen un descuento del 20%, ¿qué es más ventajoso, aplicar primero el aumento y después del descuento, o al revés?

Es igual. Se obtiene la misma cantidad: $P \cdot 1,16 \cdot 0,8 = P \cdot 0,8 \cdot 1,16$.

PROFUNDIZA

- 71** ■■■ Si la base de un triángulo aumenta un 20% y su altura disminuye un 20%, ¿qué le ocurre a su área?

$$A = \frac{b \cdot al}{2} \rightarrow \frac{b \cdot 1,2 \cdot al \cdot 0,80}{2} = \frac{b \cdot al}{2} \cdot 0,96 = A \cdot 0,96$$

El área disminuye un 4%.

- 72** ■■■ El café pierde el 20% de su peso al tostarlo. Si lo compramos a 10 €/kg, ¿a qué precio hay que venderlo para ganar un 10% después de tostarlo?

Compramos 1 kg a 10 €/kg y queremos obtener $10 \cdot 1,1 = 11$ € al vender la cantidad que nos queda después de tostarlo. Entonces, $0,8P = 11 \rightarrow$

$$\rightarrow P = \frac{11}{0,8} = 13,75 \text{ €/kg}$$

- 73** ■■■ Al lavar una tela, su longitud se reduce un 8%, y su anchura, un 4%. ¿Qué longitud debemos comprar de una pieza de 0,90 m de ancho para tener, después de lavada, 5 m² de tela?

Ancho después de lavada: $0,90 \cdot 0,96 = 0,864$ m.

Para obtener 5 m², necesitamos $\frac{5}{0,864} = 5,79$ m de longitud.

$0,92 \cdot l = 5,79 \rightarrow l = 6,29$ metros debemos comprar.

- 74** ■■■ Divide por 6 los números del 1 al 12 y anota los resultados.

a) ¿Puedes decir, sin hacer la división, cuál será la parte decimal de estos cocientes?: $61 : 6$ $62 : 6$ $63 : 6$ $64 : 6$ $65 : 6$

b) Si la parte decimal del cociente $a : 6$ es ,5, ¿qué parte decimal tendrán $(a + 1) : 6$ y $(a - 1) : 6$?

a) $61 : 6 = ,1\widehat{6}$ $62 : 6 = ,3\widehat{3}$ $63 : 6 = ,5$ $64 : 6 = ,6\widehat{6}$ $65 : 6 = ,8\widehat{3}$

b) $(a + 1) : 6$ será $,\widehat{6}$ y $(a - 1) : 6 = ,\widehat{3}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

75 ■■■ Se depositan en un banco 28 000 € al 6% anual y el banco nos descuenta un 15% de los beneficios como retención fiscal.

a) ¿Cuál será el porcentaje neto de rendimiento de ese capital?

b) Si los intereses se acumulan trimestralmente al capital, ¿cuál será el beneficio obtenido al cabo de 2 años?

a) $0,06 \cdot 0,85 = 0,051 \rightarrow$ Rendimiento neto: 5,1%.

b) $5,1 : 4 = 1,275\%$ trimestral

$$28\,000 \cdot 1,01275^8 = 30\,986,75 \text{ €}$$

$$\text{Beneficio: } 30\,986,75 - 28\,000 = 2\,986,75 \text{ €}$$