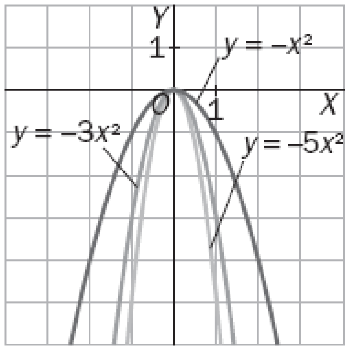
FUNCIÓN CUADRÁTICA

13.11 **Dadas las funciones:**

$$y = -x^2 \qquad y = -3x^2 \qquad y = -5x^2$$

a) Represéntalas en un mismo gráfico.

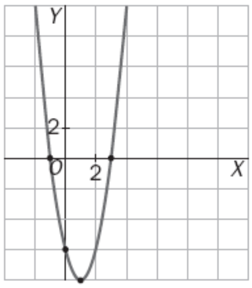
a) 

13.14 **Representa estas funciones cuadráticas y estudia las gráficas que obtengas.**

a) $y = 2x^2 - 4x - 6$ **b)** $y = -x^2 - 6x + 27$

a) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow (0, -6)$



El vértice está en $x = 1$, $y = -8 \rightarrow V(1, -8)$

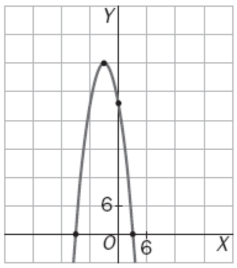
Puntos de corte con el eje OX:

$y = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \rightarrow (3, 0) \text{ y } (-1, 0)$$

b) Abierta hacia abajo, $a < 0$

Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 27 \rightarrow (0, 27)$



El vértice está en $x = -3$, $y = 36 \rightarrow V(-3, 36)$

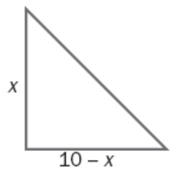
Puntos de corte con el eje OX:

$y = 0 \rightarrow -x^2 - 6x + 27 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{-2} = \frac{6 \pm 12}{-2} = \begin{cases} -9 \\ 3 \end{cases} \rightarrow (-9, 0) \text{ y } (3, 0)$$

13.17 **De todos los triángulos rectángulos cuya suma de catetos es 10 centímetros, ¿cuál es el que tiene mayor superficie?**

$$\text{Área} = A(x) = \frac{x(10 - x)}{2} = -\frac{x^2}{2} + 5x$$

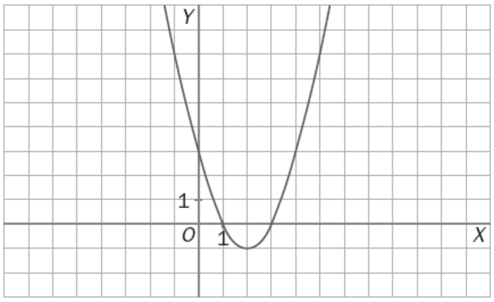


La gráfica de esta función $A(x)$ es una parábola abierta hacia abajo. Su máximo está en el vértice.

Hallamos la abscisa del vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-2 \cdot \frac{1}{2}} = 5$

El triángulo rectángulo con mayor superficie es el que tiene los dos catetos son iguales y miden 5 cm cada uno.

13.29 **Dada la siguiente parábola.**



a) ¿Cuál es su vértice?

b) Halla la ecuación del eje de simetría.

c) ¿Cuál es la ordenada del punto de abscisa $x = 4$?

d) Escribe su ecuación.

a) (2, −1)

b) $x = 2$

c) $y = 3$

d) La ecuación tendrá la forma $y = ax^2 + bx + c$

La función pasa por (0, 3), de donde se deduce que $c = 3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{También pasa por (1, 0), de donde: } 0 = a + b + 3 \rightarrow a + b = -3 \\ \text{Conocemos la abscisa del vértice: } x = \dfrac{-b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \end{array}$$

La ecuación es $y = x^2 - 4x + 3$

13.30 **Una función cuadrática tiene su vértice en el punto (4, −4). Completa la tabla utilizando la simetría de la función.**

x	2	6	5	−3
y	0	0	−3	−3

Como tiene su vértice en (4, −4), el eje de simetría es $x = 4$. Entonces:

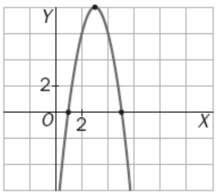
$x = 2$ es un punto simétrico a $x = 6$ respecto al eje, con lo que $f(6) = f(2) = 0$

$x = 5$ es un punto simétrico a $x = 3$ respecto al eje, con lo que $f(5) = f(3) = -3$

13.59 **Representa las siguientes funciones cuadráticas y estudia la gráfica obtenida.**

a) $y = -2x^2 + 12x - 10$ **b) $y = x^2 - 2x + 4$** **c) $y = 2x^2 - 8x + 6$** **d) $y = 3x^2 + 1$**

a) Abierta hacia abajo, $a < 0$



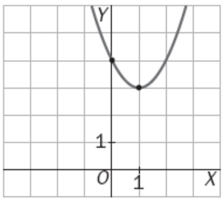
Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = -10 \rightarrow (0, -10)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 3 \rightarrow y_v = 8 \rightarrow V(3, 8)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow -2x^2 + 12x - 10 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-4} = \frac{-12 \pm 8}{-4} = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases} \rightarrow (1, 0), (5, 0)$$

b) Abierta hacia arriba, $a > 0$



Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 1 \rightarrow y_v = 3 \rightarrow V(1, 3)$

Puntos de corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$

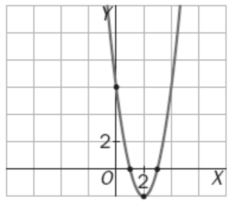
c) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje *OY*: $x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 2 \rightarrow y_v = -2 \rightarrow V(2, -2)$

Puntos de corte con el eje *OX*: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \rightarrow (3, 0), (1, 0)$$



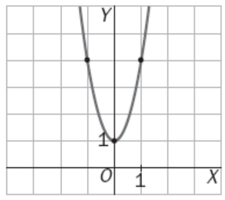
d) Abierta hacia arriba, $a > 0$

Punto de corte con el eje *OY*: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 0 \rightarrow y_v = 1 \rightarrow V(0, 1)$

Puntos de corte con el eje *OX*: $y = 0 \rightarrow 3x^2 + 1 = 0$

No es posible. La parábola no corta el eje *OX*.



13.47 La ecuación del espacio recorrido por un móvil es $s = 5 + 3t + 2t^2$, donde s se expresa en metros y t en segundos.

a) ¿Qué longitud ha recorrido el móvil al cabo de 5 segundos de iniciar el movimiento?

b) ¿Cuál es la longitud recorrida durante el quinto segundo?

c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando ha recorrido 157 metros desde el inicio?

a) $t = 5 \rightarrow s = 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 = 70$ m

b) $t = 4 \rightarrow s = 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 = 49$ m

Durante el 5.º segundo recorre una longitud que es la diferencia entre las distancias recorridas al cabo de 5 y de 4 segundos: $70 - 49 = 21$ m.

c) $157 = 5 + 3t + 2t^2 \rightarrow 2t^2 + 3t - 152 = 0 \rightarrow t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 1\,216}}{4} = 8$ s

(La respuesta negativa no tiene sentido).

13.49 Averigua cuál es el punto simétrico del punto $(-2, -5)$ con respecto al eje de simetría de la parábola $y = -2x^2 - 16x - 29$.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -4$$

El eje de simetría es $x = -4$.

El punto simétrico a $(-2, -5)$ es $(-6, -5)$.

13.39 ¿Pueden tener un mínimo las siguientes funciones? Justifica tu respuesta.

a) $y = -4x^2 - 2x + 1$

b) $y = 3(x + 1)^2 - 4$

a) No, al ser la parábola abierta hacia abajo.

b) Sí, el vértice es un mínimo de la función.

13.A6 **Halla el vértice y la ecuación del eje de cada una de estas parábolas.**

a) $y = 2x^2 - 6x - 1$

b) $y = -3x^2 + 2x + 9$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

d) $y = 2x^2 + 5$

a) $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $y_v = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{11}{2} \rightarrow V\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$. Eje $x = \frac{3}{2}$

b) $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$; $y_v = -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 9 = \frac{28}{3} \rightarrow V\left(\frac{1}{3}, \frac{28}{3}\right)$. Eje $x = \frac{1}{3}$

c) $x_v = \frac{b}{2a} = \frac{3}{1} = 3$; $y_v = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = -\frac{7}{2} \rightarrow V\left(3, -\frac{7}{2}\right)$. Eje $x = 3$

d) $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$; $y_v = 2 \cdot 0^2 + 5 = 5 \rightarrow V(0, 5)$. Eje $x = 0$

11.9 **Con 1000 metros de alambre, deseamos construir un cercado de forma rectangular que tenga la máxima área posible. ¿Cuáles serán sus dimensiones?**

Sea b la base del rectángulo y h su altura, tenemos $1000 = 2b + 2h$. Simplificando, $500 = b + h$. Despejando una de las variables se obtiene: $b = 500 - h$.

El área del rectángulo que se quiere maximizar es: $S = b \cdot h$.

Sustituyendo el valor de b en esta última expresión: $S = h \cdot (500 - h) = -h^2 + 500h$.

Se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a < 0$. Si se calculan las coordenadas del vértice, se obtiene el valor de h que hace su superficie máxima.

$h_{máx} = \frac{-500}{-2} = 250$ m; $\quad S_{máx} = -250^2 + 500 \cdot 250 = 62\,500$ m^2

Sustituyendo h en la expresión de b, resulta $b_{máx} = 500 - 250 = 250$ m.

Por tanto, para obtener un cercado rectangular de superficie máxima con 1000 m de alambre, la base y la altura deben medir 250 m cada una.

11.10 **Una empresa que fabrica hornos microondas obtiene unos beneficios por su venta dados por la siguiente función:**

$$f(x) = 350x - 0{,}1x^2 - 20\,000$$

¿Cuántos hornos deben fabricarse para que el beneficio sea máximo?

Se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a = -0{,}1 < 0$. Si se calculan las coordenadas del vértice, se obtiene el valor de x que hace los beneficios máximos.

$x_{máx} = \frac{-350}{-0{,}2} = 1750$ hornos. Por tanto, deben fabricarse 1750 hornos para que el beneficio sea máximo.

11.39 **Si el vértice de una parábola es el punto $(-6, 10)$, ¿cuál es su eje de simetría?**

Su eje de simetría es la recta $x = -6$.

11.47 **Una pelota, tras ser golpeada por un tenista, sigue una trayectoria dada por la expresión $f(t) = 8t - t^2$, siendo t el tiempo (en segundos) transcurrido desde el golpe, y $f(t)$, la altura (en metros) a la que se encuentra la pelota.**

a) ¿A qué tipo de gráfica corresponde esta trayectoria?

b) ¿Cuándo alcanza la pelota su máxima altura?

c) ¿Cuál es esa altura máxima conseguida?

d) ¿En qué momento cae la pelota a la pista?

a) Se corresponde con una parábola.

b) Como se trata de una parábola con las ramas hacia abajo, pues $a = -1 < 0$, alcanza su máximo en el vértice.

Vértice: $t = -\dfrac{8}{2 \cdot (-1)} = 4$. La pelota alcanza su altura máxima a los 4 segundos.

c) $f(4) = 32 - 16 = 16$. La altura máxima conseguida es de 16 metros.

d) La pelota cae a la pista en el segundo t, para el cual $f(t) = 0$.

$8t - t^2 = 0 \Rightarrow t(8 - t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 8$. Vuelve al suelo a los 8 segundos de ser lanzada.

1 **Representa las siguientes parábolas:**

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$

a) $y = x^2 - 2x + 3$

Puntos de corte con $y = 3 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Vértice: (1, 2)

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x^2 - 2x + 3 = 0$

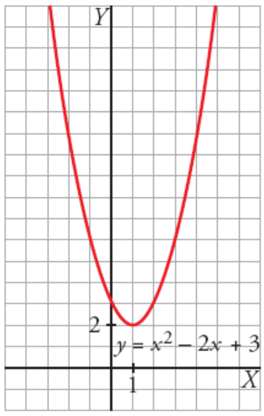
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No hay puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 3 \rightarrow (0, 3)$

Puntos próximos al vértice:

x	–1	2	3
y	6	3	6



b) $y = x^2 - 6x + 5$

Puntos de corte con $y = 5 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array} \right.$

Vértice: (3, –4)

Puntos de corte con los ejes:

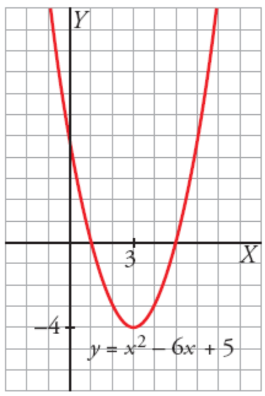
Eje X: $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{array} \right.$$

Eje Y: $y = 5 \rightarrow (0, 5)$

Puntos próximos al vértice:

x	2	4
y	–3	–3



31 **Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x \text{ en euros}$$

Y los ingresos que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2 \text{ en euros}$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función beneficio es:

$B = I - G = 600x - 0{,}1x^2 - (20\,000 + 250x) \rightarrow B(x) = -0{,}1x^2 + 350x - 20\,000$

El vértice es el máximo: $V = \dfrac{-350}{-2 \cdot 0{,}1} = 1\,750$

Se deben fabricar 1 750 ordenadores para que el beneficio sea máximo.

36 **La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s es $h = 20t - 5t^2$.**

a) Haz una representación gráfica.

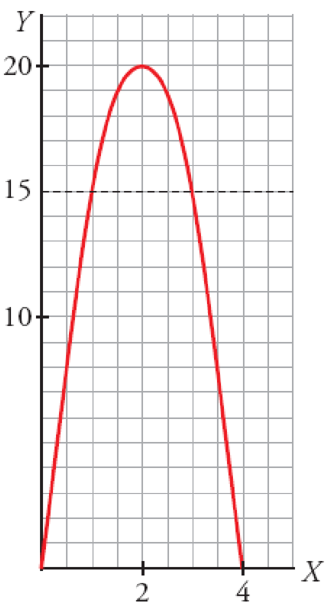
b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

a)



b) Dominio de definición = [0, 4]

c) La piedra alcanza la altura máxima a los 2 segundos de haberla lanzado, y es de 20 m.

d) A los 4 segundos.

e) $20t - 5t^2 = 15$

$5t^2 - 20t + 15 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array} \right.$

$-5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \rightarrow 1 \leq t \leq 3$

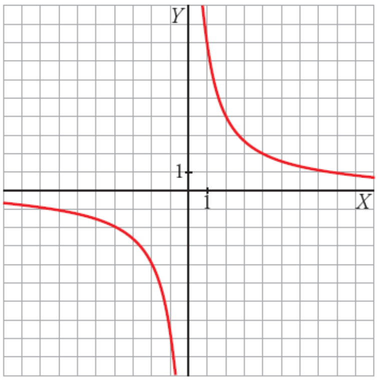
FUNCIÓN PROPORCIONALIDAD INVERSA

1 Representa:

a) $y = \dfrac{8}{x}$ b) $y = -\dfrac{8}{x}$ c) $y = \dfrac{8}{x-2}$

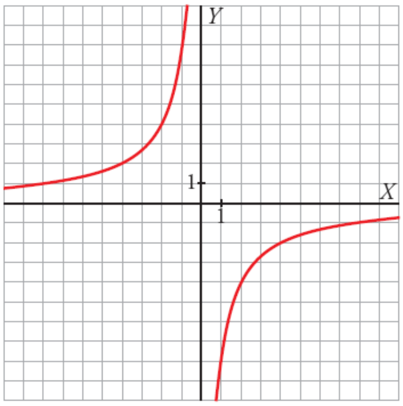
a) $y = \dfrac{8}{x}$

X	Y
–8	–1
–4	–2
–2	–4
–1	–8
1	8
2	4
4	2
8	1



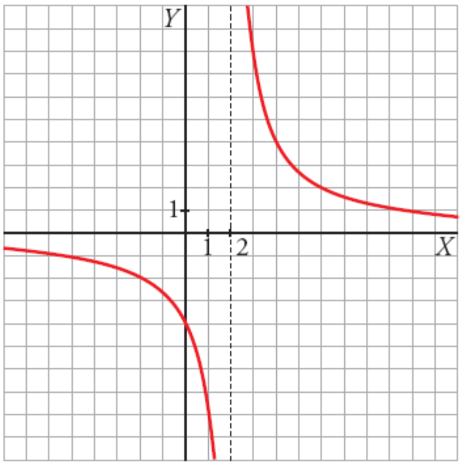
b) $y = \dfrac{-8}{x}$

X	Y
–8	1
–4	2
–2	4
–1	8
1	–8
2	–4
4	–2
8	–1

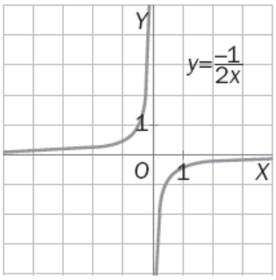


c) $y = \dfrac{8}{x-2}$

X	Y
–6	–1
–2	–2
0	–4
1	–8
3	8
4	4
6	2
10	1



11.5 **Representa gráficamente la siguiente función de proporcionalidad inversa: $f(x) = \dfrac{-1}{2x}$.**



11.31 **Completa la siguiente tabla de valores y realiza los ejercicios propuestos.**

x	1	2	3	4	6
y	36		12		6

a) ¿Qué tipo de relación existe entre las variables?

b) Escribe la expresión algebraica que indica cómo se obtiene y a partir de x.

c) Construye, para esa función, una tabla de valores negativos de x.

d) Representa gráficamente dicha función.

Tabla: 18 (en la segunda columna) y 9 (en la cuarta columna)

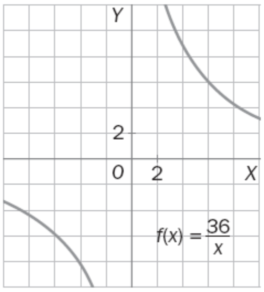
a) Existe una relación de proporcionalidad inversa.

b) $y = \dfrac{36}{x}$

c)

x	−1	−2	−3	−4	−6
y	−36	−18	−12	−9	−6

d)



29 **Rocío ha comprado un regalo de cumpleaños para Paz que ha costado 100 €. Como el resto de los amigos del grupo no han comprado nada, deciden pagar el regalo entre todos. Construye una función que nos dé el dinero que debe poner cada uno dependiendo del número de personas que haya y dibújala.**

Si van a cenar a un restaurante en el que la comida vale 10 €, ¿cuál será la función del dinero que tiene que poner cada uno, sin incluir a Paz, dependiendo del número de personas que son? Dibújala en los mismos ejes. Di el dominio de definición de ambas funciones teniendo en cuenta que x solo toma valores naturales y suponiendo que el número de amigos no supera 10.

Si el número de amigos es x, $x \in \mathbb{N}$, la función que da lo que debe pagar cada uno es $y_1 = \dfrac{100}{x}$.

Si van a un restaurante, entonces la función es $y_2 = \dfrac{100 + 10(x + 1)}{x}$.

11.33 **A partir de su expresión algebraica, indica si las siguientes funciones de proporcionalidad inversa son crecientes o decrecientes.**

a) $y = \frac{-8}{x}$ b) $y = \frac{7}{2x}$ c) $y = \frac{1}{3x}$ d) $y = \frac{-2}{5x}$

Son crecientes las funciones de los apartados a y d , decrecientes las de los apartados b y c

11.61 **Completa la siguiente tabla de valores sabiendo que *x* y *f*(*x*) son inversamente proporcionales.**

¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona ambas variables?

x	2	3	4	5	6
y		80			40

x	2	3	4	5	6
y	120	**80**	60	48	**40**

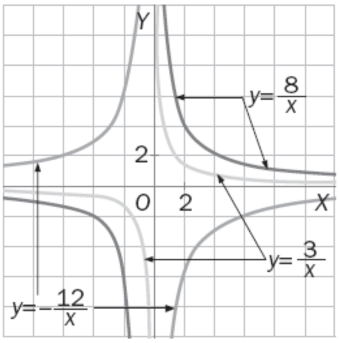
La expresión es $y = \frac{240}{x}$.

11.62 **Representa en los mismos ejes las funciones:**

a) $f(x) = \frac{8}{x}$

b) $g(x) = -\frac{12}{x}$

c) $h(x) = \frac{3}{x}$



FUNCIÓN EXPONENCIAL

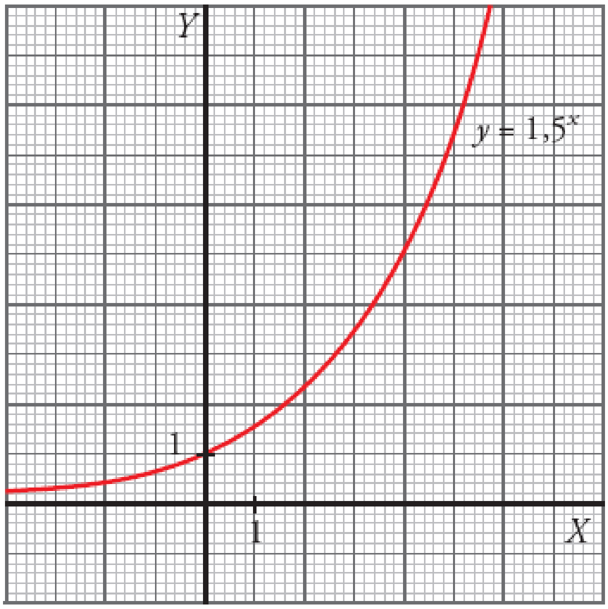
1 **Representa, utilizando la calculadora y sobre papel milimetrado:**

a) $y = 1{,}5^x$ **b)** $y = 0{,}8^x$

a) $y = 1{,}5^x$

Hacemos la tabla de valores:

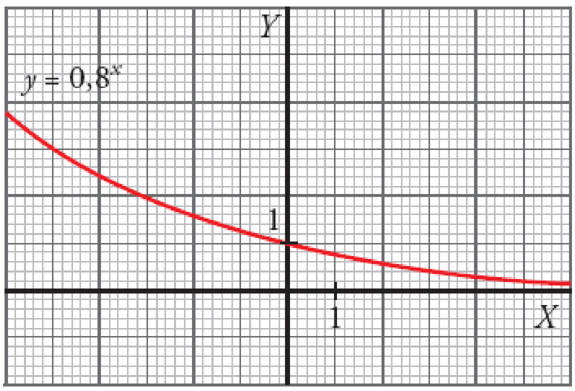
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0,3	$0,\widehat{4}$	$0,\widehat{6}$	1	1,5	2,25	3,37



b) $y = 0{,}8^x$

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1,95	1,56	1,25	1	0,8	0,64	0,51



3 **Escribe la ecuación que expresa el número aproximado de amebas que habrá al cabo de t horas en un cultivo similar al del ejemplo 1, suponiendo que, al principio, hay 3 amebas.**

¿Cuántas amebas habrá al cabo de 150 minutos?

Inicialmente hay 3 amebas y, aproximadamente, cada hora el número de amebas se duplica; por tanto, el número aproximado de amebas que habrá al cabo de t horas será $N = 3 \cdot 2^t$ con $t \geq 0$.

Si $t = 150$ min $= 2{,}5$ h, entonces $N = 3 \cdot 2^{2,5} \approx 17 \rightarrow$ Al cabo de 150 minutos habrá, aproximadamente, 17 amebas.

32 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por lo tos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow$ $3 = ka^0$ $\rightarrow$ $k = 3$

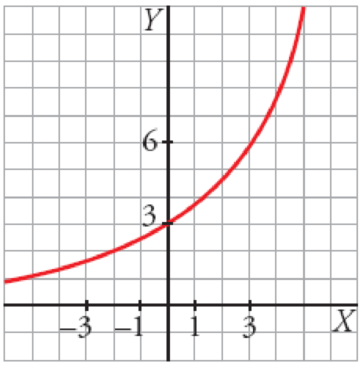
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow$ $3{,}6 = ka^1$ $\rightarrow$ $3{,}6 = 3a$ $\rightarrow$ $a = 1{,}2$

Tenemos la función $y = 3 \cdot (1{,}2)^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



4 **Un capital de 130 000 € está en un banco colocado al 12% anual. Expresa el valor del capital C en función del tiempo, t, expresado en años, que permanezca el dinero en el banco.**

La expresión que da el capital acumulado al cabo de t años es:

$$C = 130\,000 \cdot (1{,}12)^t \text{ con } t \geq 0$$

5 **El tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa de una sustancia radiactiva se llama periodo de semidesintegración.**

Una sustancia radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 2 años. Tenemos 8 g de esa sustancia. La ecuación que da la cantidad de sustancia radiactiva en función del tiempo transcurrido, en años, es $C = 8a^t$. ¿Cuál es el valor de a?

☞ *$8a^2 = 4$. [Razona por qué]. Despeja a en la igualdad anterior.*

Al cabo de 2 años tendremos la mitad de la sustancia, es decir, 4 gramos.

$$4 = 8a^2 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} = a^2 \;\rightarrow\; a = \sqrt{1/2} \;\rightarrow\; a \approx 0{,}71$$

14 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores. (Ayúdate de la calculadora).**

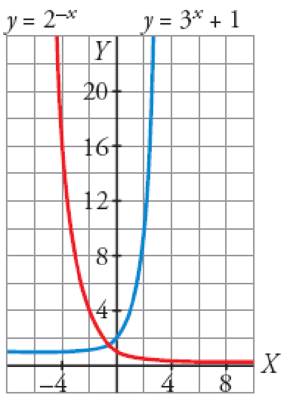
a) $y = 2^{-x}$ **b)** $y = 3^x + 1$ **c)** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$ **d)** $y = 0{,}75^{-x}$

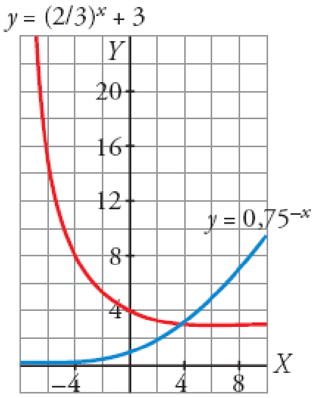
x	2^{-x}
–4	16
–2	4
0	1
2	0,25
4	0,06
6	0,16

x	$3^x + 1$
–4	1,01
–2	1,1
0	1
1	4
2	10
3	28

x	$(2/3)^x + 3$
–4	8,06
–2	5,25
0	4
2	3,4
4	3,2
6	3,1

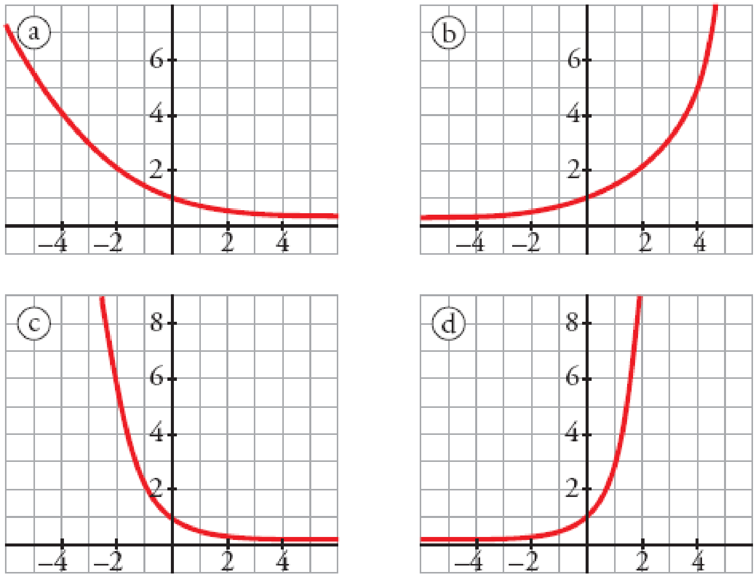
x	$0{,}75^{-x}$
–4	0,32
–2	0,56
0	1
2	1,8
4	3,2
6	5,6





20 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1{,}5^x$ **III)** $y = 0{,}4^x$ **IV)** $y = 0{,}7^x$



Di, de cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I $\leftrightarrow$ d) Creciente

II $\leftrightarrow$ b) Creciente

III $\leftrightarrow$ c) Decreciente

IV $\leftrightarrow$ a) Decreciente